

前 言

数学分析是数学类各专业的最重要的一门基础课程，是数学类各专业及一些信息、计算机类专业硕士研究生入学考试的必考课程之一，同时也是大学生入学后遇到的第一门内容抽象的课程。对初学者来说，其中的许多概念难懂，方法抽象，解题难以入手。因此，如何把握课程的内容，掌握正确的学习方法显得至关重要。另外，有一些理论问题和解题的方法与技巧在该课程的教学过程中不能充分地展开，在本科高年级开设数学分析选讲是十分必要的，能够使报考硕士研究生的学生从容地面对入学考试。基于上述原因，我们编写了这本书，以帮助学生学好数学分析，满足广大读者学习和考研复习的需要。

全书采用分类、分块的方法，系统地总结了数学分析中的基本内容和基本方法，以邓东皋、尹小玲编著的《数学分析简明教程》（以下简称《教程》）的课后习题解答为主线，给出了 300 多道典型例题。通过一系列典型例题，由浅入深地介绍了数学分析的学习方法和解题方法，同时注重一题多解、一题多证。特别是通过对典型例题的分析和注释，使学生能够更好地融会知识、理解概念和掌握方法，以提高学生的分析问题和解决问题的能力。

本书包括：函数与极限、实数理论的基本定理、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、数项级数和函数项级数、反常积分和含参变量积分共八章。

各章节的内容结构分为基本要求、主要概念和结论、常用解题方法与典型例题、综合例题四部分内容。

一、基本要求。根据我们自己对数学分析教学大纲的理解，列出了需要掌握的知识点。由于没有统一要求，仅供参考。

二、主要概念和结论. 按基本要求列出基本内容, 帮助读者抓住重点, 全面把握章节内容.

三、常用解题方法及典型例题. 根据编者的教学实践, 选解了大量课程内容要求的典型例题和《教程》的主要习题. 对具有代表性的题目给出了多种解题方法, 对常用解题方法进行了分析、注释和总结.

四、综合例题. 为了满足进一步深造的同学的需求, 我们选解了大量综合性的题目和部分理工科大学的研究生入学试题.

书后的附录 1 给出了《教程》的主要习题解答与提示, 附录 2 给出了东北大学和北京师范大学近几年的硕士研究生入学考试试题.

本书由王晓敏、李晓奇、惠兴杰主编; 副主编为王书田 (河北工业职业技术学院)、张建波、马祥、张子选.

由于编者水平所限, 加上时间仓促, 不妥与错误之处在所难免, 所作的解答也未必是最好的, 恳请读者批评指正.

编 者

2005 年 7 月于东北大学秦皇岛分校

目 录

第一章 函数与极限	1
§ 1 函 数	1
§ 2 数列极限	4
§ 3 函数的极限与连续性	7
§ 4 综合例题	12
第二章 实数理论的基本定理	23
§ 1 实数连续性及其等价描述	23
§ 2 闭区间上连续函数的性质	29
§ 3 综合例题	34
第三章 一元函数微分学	39
§ 1 导数与微分	39
§ 2 微分中值定理及其应用	48
§ 3 综合例题	64
第四章 一元函数积分学	67
§ 1 不定积分	67
§ 2 定积分	75
§ 3 定积分的应用	89
§ 4 综合例题	94
第五章 多元函数微分学	103
§ 1 多元函数的极限与连续性	103

§ 2	偏导数与全微分	113
§ 3	隐函数存在定理及其应用	127
§ 4	几何应用、极值与条件极值	133
§ 5	综合例题	142
第六章	多元函数积分学	146
§ 1	重积分	146
§ 2	曲线积分与曲面积分	157
§ 3	各种积分之间的联系	169
§ 4	综合例题	180
第七章	数项级数与函数项级数	185
§ 1	数项级数	185
§ 2	函数项级数	200
§ 3	幂级数	208
§ 4	傅里叶级数	214
§ 5	综合例题	217
第八章	广义积分与含参变量积分	229
§ 1	广义积分	229
§ 2	含参变量积分	243
§ 3	综合例题	256
附录 1	《数学分析简明教程》典型习题解答	267
附录 2	部分高校数学分析考研试题与模拟试题	379
附录 3	常用数学符号一览表	394
附录 4	中英文人名对照表	395
参考文献	396

第一章 函数与极限

数学分析这门课程研究的对象是函数，而它是用极限方法研究函数的。从方法论的角度来说，这是数学分析区别于初等数学的显著性标志。

数学分析中几乎所有的概念都离不开极限。极限概念是数学分析的重要概念，极限理论是数学分析的基础理论和核心，它贯穿于数学分析的全部内容之中。

§1 函 数

一、基本要求

1. 理解函数的概念，理解复合函数、分段函数的概念。
2. 掌握基本初等函数的性质及其图形。
3. 掌握几种重要的非初等函数。
4. 会判断函数的有界性、奇偶性等性质。

二、主要概念和结论

1. 函数的定义 设 X 是某实数集合，若存在一对对应法则 f ，使得对于 X 中的任一实数 x ，存在惟一的实数 $y \in \mathbb{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 X 的函数，记为

$$f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ 或 } f: x \rightarrow y \text{ 或 } y = f(x), x \in X.$$

X 称为函数 f 的定义域， x 称为自变量， y 称为因变量。

函数的确定取决于两个因素：定义域 X ；对应法则 f 。

2. 初等函数

六种基本初等函数 常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。

初等函数 由基本初等函数经有限次的四则运算和有限次的复合运算所得的函数。

3. 几种常用的重要函数

(1) 振荡函数

$$y = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(2) 取整函数 $y = [x]$.

(3) 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

(4) 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

4. 函数的几种基本特性 设函数 $f(x)$ 在区间 X 有定义.

(1) 奇偶性 设 X 关于原点对称, 若 $\forall x \in X$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 若 $\forall x \in X$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 单调性 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, 且 $x_1 \leq x_2$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 X 单调上升(下降)或单调增加(减少).

(3) 周期性 若 $\exists T > 0$, $\forall x \in X$, 且 $x + T \in X$, 有 $f(x + T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的周期.

(4) 有界性 若 $\exists M > 0$, $\forall x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 X 有界.

三、常用解题方法与典型例题

【例 1-1】 求证 $\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$; $\min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$.

【证明】 若 $a \geq b$, 则 $\max(a, b) = a$, $\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$, 从而 $\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$; 若 $a < b$, 同法可证结果成立. 同理可证 $\min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$.

【例 1-2】 证明 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界.

【证明】 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 由 $x^2 + 1 \geq 2|x|$ 知, $\left| \frac{2x}{x^2+1} \right| \leq 1$. 故 $|f(x)| = \frac{1}{2} \left| \frac{2x}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{2}$. 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界.

【例 1-3】 叙述函数无界, 并证明 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, 1)$ 无界.

【解】 设函数 $f(x)$ 在 X 有定义, 若 $\forall M > 0, \exists x_0 \in X$, 使得 $|f(x_0)| > M$, 则 $f(x)$ 在 X 无界.

$\forall M > 0$, 取 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{1+M}} \in (0, 1)$, 则 $|f(x_0)| = \frac{1}{x_0^2} = 1 + M > M$. 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 无界.

【例 1-4】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何函数, 证明 $f(x)$ 可分解成奇函数与偶函数之和.

【证明】 构造函数 $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, 则 $g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -g(x)$, $h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = h(x)$, 即 $g(x)$ 为奇函数, $h(x)$ 为偶函数. 而 $f(x) = g(x) + h(x)$, 故 $f(x)$ 可分解成奇函数与偶函数之和.

【例 1-5】 用肯定语气叙述在 $(-\infty, +\infty)$

- (1) $f(x)$ 不是奇函数; (2) $f(x)$ 不是单调上升函数;
(3) $f(x)$ 无零点; (4) $f(x)$ 无上界.

【解】 (1) 若 $\exists x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f(x_0) \neq -f(-x_0)$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不是奇函数.

(2) 若 $\exists x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 使得 $f(x_1) > f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不是单调上升函数.

(3) 若 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $|f(x)| > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无零点.

(4) 若 $\forall M > 0, \exists x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f(x_0) > M$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无上界.

【例 1-6】 设 $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$. 求复合函数 $f(g(x))$, $g(f(x))$.

【解】 因 $g(x) \leq 0$, 所以

$$f(g(x)) = -g(x) - 1 = \begin{cases} -x-1, & x \leq 0 \\ x^2-1, & x > 0 \end{cases}$$

易知当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $f(x) \leq 0$; 当 $x < -1$ 或 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$. 于是

$$g(f(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq 0 \\ -f^2(x), & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x-1, & -1 \leq x \leq 0 \\ -(-x-1)^2, & x < -1 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$$

§2 数列极限

一、基本要求

1. 掌握数列极限的“ ϵ - N ”定义, 会用它们证明数列极限及有关命题.
2. 掌握收敛数列性质(惟一性、单调性、保号性及不等式性质等)及四则运算法则.
3. 掌握数列极限存在的两个准则.

二、主要概念和结论

1. 数列极限的定义 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$. 也称 $\{x_n\}$ 收敛于 a .

若 $\{x_n\}$ 的极限为 0, 则称 $\{x_n\}$ 为无穷小量.

若 $\forall G > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $|x_n| > G$, 则称 $\{x_n\}$ 为无穷大量.

2. 收敛数列的性质 若 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 则数列 $\{x_n\}$ 具有下列性质:

(1) 有界性 $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+, \text{有 } |x_n| \leq M$.

(2) 保号性 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $x_n > \frac{a}{2} > 0$.

(3) 保序性 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 且 $a > b$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $x_n > y_n$.

(4) 极限不等式 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 且 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $x_n \leq y_n$, 则 $a \leq b$.

注 即使 $x_n < y_n$, 也只有结论 $a \leq b$.

(5) 惟一性 若数列极限存在, 则极限是惟一的.

3. 数列极限的运算性质

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

特别地, 若 c 是常数, 便有 $\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(2) 夹迫准则 若 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

(3) 单调有界原理 单调有界的数列必有极限.

(4) 重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

(5) 若 $\{x_n\}$ 是无穷小量, $\{y_n\}$ 是有界数列, 则 $\{x_n y_n\}$ 是无穷小量.

三、常用解题方法与典型例题

【例 1-7】用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \frac{3}{2}$.

【证明】 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{9}{\epsilon^2}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{4\sqrt{n}-2} = \frac{5}{2\sqrt{n}+2(\sqrt{n}-1)} \leq \frac{5}{2\sqrt{n}} < \frac{3}{\sqrt{n}} < \epsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \frac{3}{2}$.

【例 1-8】用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!} = 0$.

【证明】 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \max\left\{11, \left[\frac{10M}{\epsilon}\right] + 1\right\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{10^n}{n!} - 0 \right| = \frac{10 \times 10 \times \cdots \times 10}{1 \times 2 \times \cdots \times 10} \cdot \frac{10 \times \cdots \times 10}{11 \times \cdots \times n} < M \frac{10}{n} < \epsilon.$$

其中 $\frac{10^{10}}{1 \times 2 \times \cdots \times 10} = M$. 这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!} = 0$.

【例 1-9】证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$.

【证明】 令 $a = 1 + h, h > 0$, 则

$$a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

于是 $0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{(n-1)h^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. 由夹迫准则知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

【例 1-10】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right]$.

【解】 由于 $\frac{n+1}{(2n)^2} = \frac{1}{(2n)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$, 而 $\frac{n+1}{(2n)^2} \rightarrow 0$, $\frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 由夹迫准则知, 原式 $= 0$.

【例 1-11】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cos n$.

【解】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2} = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 0$, 而 $|\cos n|$ 是有界数列, 故原式 $= 0$.

注 本题的典型错误解法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cos n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 0.$$

【例 1-12】 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$, $n = 2, 3, \dots$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

【证明】 $0 < x_1 = \sqrt{2} < 2$. 假设 $0 < x_n < 2$, 则 $0 < x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. 由归纳法知, $|x_n|$ 有上界. 由 $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\sqrt{2x_{n-1}}}{x_{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{x_{n-1}}} \geq 1$ 知, $|x_n|$ 是单调上升的. 根据单调有界原理, $|x_n|$ 的极限存在, 设为 a . 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2x_{n-1}}$ 可得, $a = \sqrt{2a}$, 解得 $a = 2$ (舍去 0).

【例 1-13】 求下列极限 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

【解】 (1) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = 1$.

(2) 由 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} < \frac{n+1}{n^2-1} = \frac{1}{n-1}$ ($n > 1$) 得

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n,$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e$, 由夹迫准则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = e.$$

§3 函数的极限与连续性

一、基本要求

1. 掌握函数极限定义, 会用它们证明函数极限及有关命题.
2. 熟练运用函数极限的运算性质计算、证明有关极限和命题.
3. 掌握利用两个重要极限求极限的方法, 掌握函数极限与数列极限的关系.
4. 掌握连续与间断的定义并能确定间断点的类型.
5. 掌握无穷小量的比较与阶.
6. 理解函数的一致连续性概念, 会用定义证明函数在区间的一致连续性.

二、主要概念和结论

1. 函数的极限 设 $f(x)$ 在 x_0 点附近 (x_0 点除外) 有定义, A 是一定数. 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta$ 满足 $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$, 但 $|f(x_\delta) - A| \geq \epsilon_0$.

另外, 根据 x 的变化过程, 函数极限概念可以进一步推广, 如

① 右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

② 左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

③ 无穷大 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty: \forall G > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > G$.

④ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty: \forall G > 0, \exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $f(x) < -G$.

⑥ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty: \forall G > 0, \exists \delta > 0$, 当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 有

$$|f(x)| > G.$$

2. 设在自变量的某个变化过程中, 函数的极限为 0, 则称其为无穷小量.

3. 函数极限的性质(仅以 $x \rightarrow x_0$ 为例)

(1) 局部有界性 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 有界.

(2) 局部保号性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$.

(3) 局部保序性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > g(x)$.

(4) 极限不等式 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) \leq g(x)$, 则 $A \leq B$.

(5) 极限惟一性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则极限是惟一的.

(6) 海涅定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 且 $x_n \neq x_0 (n = 1, 2, \dots)$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ (A 可取无穷大).

4. 函数极限的运算性质

函数极限的四则运算法则、夹迫准则与数列极限类似, 不再重复. 下面仅给出几个重要的类似性质.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $\exists \delta > 0$, $g(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 有界, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 单调上升且有上(下)界, 则 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$) 存在; 对 $x_0 \in (a, b)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 但不一定相等.

(3) 两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

5. 函数的连续性

(1) 定义 设 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点是连续的.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续.

从而, $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点既右连续, 又左连续.

若 $\forall x_0 \in I$, 都有 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则称 $f(x)$ 在 I 连续.

(2) 间断点 若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点间断, x_0 称为间断点.

(3) 间断点的类型 设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

① 可去间断点 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;

② 第一类间断点 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 都存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$;

③ 第二类间断点 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 至少有一个不存在.

6. 无穷小量的比较 设 α, β 为无穷小量.

(1) 若 $\exists A, B > 0$, 使 $0 < A \leq \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \leq B$, 则称 α 与 β 为同阶无穷小量. 需要注意的是, 当 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow l \neq 0$ 时, α 与 β 为同阶无穷小量.

(2) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 1$, 则称 α 与 β 为等价无穷小量. 记为 $\alpha \sim \beta$.

(3) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$, 则称 α 为比 β 高阶的无穷小量, 或称 β 是较 α 低阶的无穷小量. 记为 $\alpha = o(\beta)$.

(4) 把 x 作为基本无穷小量, 若 $\frac{\alpha}{x^k} \rightarrow l (l \neq 0)$, 称 α 为 x 的 k 阶无穷小量.

三、常用解题方法与典型例题

【例 1-14】 用极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{2}$.

【证明】 限制 $|x+1| < 1$, 则 $-2 < x < 0$, 从而 $|x+3| > 1$. $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{1, 2\epsilon\}$, 则当 $0 < |x - (-1)| = |x+1| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x+1}{2(x+3)} \right| < \frac{|x+1|}{2} < \epsilon.$$

这就证明了 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{2}$.

【例 1-15】 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ (n, m 为正整数).

【解】

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)}{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1)} = \frac{n}{m}.$$

【例 1-16】 求函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 1 + x^2, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点的左、右极限.

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2) = 1$.

【例 1-17】 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的充要条件是对每一个严格上升趋于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

【证明】 必要性. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists M > 0$, $\forall x > M$ 有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 又设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (此时 $\{x_n\}$ 可不必严格上升), 则对上述 M , $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$ 有 $x_n > M \Rightarrow |f(x_n) - A| < \epsilon$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

充分性. 用反证法. 设对任何严格上升趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 不成立, 则 $\exists \epsilon_0 > 0$, $\forall M > 0$, $\exists x > M$ 使得 $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$.

取 $M_1 = 1$, $\exists x_1 > M_1$, 使 $|f(x_1) - A| \geq \epsilon_0$;

取 $M_2 = \max\{2, x_1\}$, $\exists x_2 > M_2$, 使 $|f(x_2) - A| \geq \epsilon_0$;

取 $M_n = \max\{n, x_{n-1}\}$, $\exists x_n > M_n$, 使 $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$.

这样可以得到严格上升趋于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$, 而 $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$, 即 $|f(x_n)|$ 不收敛于 A , 矛盾.

注 本例结论是海涅定理对单侧极限的更强的表述形式, 同样建立了函数极限与数列极限的密切关系. 对其他类型的单侧极限也有类似的结论.

【例 1-18】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \cdot \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例 1-19】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$.

分析 在考察函数极限时, 要特别注意自变量的变化趋势及同一个函数在不同的自变量的变化趋势下的极限.

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x$ 为重要极限, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 1$;

对于 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$, 由于 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, $x \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$;

对于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x$, 由于 $|\sin x| \leq 1$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x =$

0;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

【例 1-20】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 方法一 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1-x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$.

方法二 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^{\frac{1-x}{2x} \cdot \frac{2}{1-x}} = e^2$.

【例 1-21】 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

分析 利用海涅定理的逆否命题是证明某些函数极限不存在的有效方法. 对此例, 只需找到两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都以 0 为极限, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ 不相等即可.

【证明】 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, 则 $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{y_n} = -1$. 利用海涅定理, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

【例 1-22】 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的充要条件是对任何数列 $x_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 有 $f(x_n) \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) (A 可取无穷大).

【证明】 这里仅对 A 为有限数时给出证明.

必要性. 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 故 $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则对上述的 $X > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > X$. 于是 $|f(x_n) - A| < \epsilon$. 这就证明了数列 $f(x_n) \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$).

充分性. 用反证法. 假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq A$, 则 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall X > 0, \exists x_X > X$, 使 $|f(x_X) - A| \geq \epsilon_0$. 特别地, 取 $X_n = n (n = 1, 2, \dots)$, 则相应地 $\exists x_n > X_n = n$, 使得 $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$. 于是得到数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 但 $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$. 这与 $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$ 矛盾.

【例 1-23】 用定义证明函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在其定义域内连续.

【证明】 易知函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. $\forall x_0 \in (0, +\infty)$, $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2} x_0, \frac{1}{2} x_0^2 \epsilon \right\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x_0} \right| &= \left| 2 \cos \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}}{2} \sin \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{2} \right| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| \\ &= \frac{|x - x_0|}{|x \cdot x_0|} < \frac{2}{x_0^2} |x - x_0| < \epsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 是连续的. 同理可证其在 $(-\infty, 0)$ 也是连续的.

§ 4 综合例题

【例 1-24】 求证 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

【证明】 设 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in [0, +\infty)$. 易知 $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ 在 $[0, +\infty)$ 是单调增加的. 由于 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 就有 $f(|a+b|) \leq f(|a| + |b|)$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a| + |b|}{1+|a| + |b|} = \frac{|a|}{1+|a| + |b|} + \frac{|b|}{1+|a| + |b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

注 本题可以利用分析法证明, 但比较麻烦.

【例 1-25】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.

【证明】 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 得, $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1$, 有 $|x_n - a| < \epsilon/2$. 当 $n > N_1$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \quad (1) \\ &\leq \frac{1}{n} |(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)| + \frac{1}{n} (|a_{N_1+1} - a| + \cdots + |a_n - a|) \\ &< \frac{M}{n} + \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

其中 $M = |(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)|$. 又对上述 $\varepsilon > 0$, 取 $N_2 = \left\lceil \frac{M}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, 则

$\forall n > N_2$, 有 $\frac{M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, $\forall n > N$, 有

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < \varepsilon.$$

注 (1) 本例的证明方法是一种典型的方法. 为估计(1)式右边, 将其分子分成两部分, 前一部分有 N_1 项, 除以 n 后可任意小(当 n 充分大时); 后一部分放大为 $n - N_1$ 项, 每一项都小于 $\varepsilon/2$. 从而由给定的 ε 最终确定出 N .

(2) 可类似地证明当 $a = +\infty$ 或 $a = -\infty$ 时, 结论仍成立.

【例 1-26】(斯图茨定理) 若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 ① $y_{n+1} > y_n$; ② $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$; ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A$ (A 为有限数或无穷大), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

由此证明若 $0 < a_1 < 1$, $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ ($n = 1, 2, \cdots$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$.

【证明】 仅对 A 为有限数时给出证明. 由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A$ 知, $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}^+$, 当 $m \geq M$ 时, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{m+1} - x_m}{y_{m+1} - y_m} - A < \frac{\varepsilon}{2},$$

即对 $m = M, M+1, \cdots$, 有

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{m+1} - y_m) < x_{m+1} - x_m < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{m+1} - y_m).$$

分别以 $m = M, M+1, \cdots, n-1$ 代入上式, 并将得到的 $n - M$ 个不等式相加, 得

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_M) < x_n - x_M < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_M).$$

$$\text{即 } \left| \frac{x_n - x_M}{y_n - y_M} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, $\exists N > M$, 当 $n > N$ 时, 有 $0 < 1 - \frac{y_M}{y_n} < 1$ 及

$\left| \frac{x_M - Ay_M}{y_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. 由恒等式 $\frac{x_n}{y_n} - A = \left(1 - \frac{y_M}{y_n} \right) \left(\frac{x_n - x_M}{y_n - y_M} \right) + \frac{x_M - Ay_M}{y_n}$ 知,

$\forall n > N$, 有 $\left| \frac{x_n}{y_n} - A \right| < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

用数学归纳法容易证明 $0 < a_n < 1$. 由条件 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - a_n < 1$, 知 $|a_n|$ 单调下降趋于 0, 于是 $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$. 令 $x_n = n$, $y_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $y_n < y_{n+1}$, 由斯图茨定理得,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} a_n}{a_n - a_{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 (1 - a_n)}{a_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n) = 1. \end{aligned}$$

注 (1) 斯图茨定理实质上是已知数列 $|x_n|$ 与正无穷大数列 $|y_n|$ 的各自相邻两项增长率之比的极限, 来求得 $\frac{x_n}{y_n}$ 的极限. 这与求函数极限时的洛必达法则非常相似, 即用 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 来导出 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限 $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{型} \right)$. 可以认为斯图茨定理与洛必达法则是数学分析中处理待定型极限的两个重要工具, 它们分别适用于变量为“离散的”和“连续的”的情形.

(2) 斯图茨定理也有相应于 $\frac{0}{0}$ 型的结论.

(3) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (a 可为 $+\infty$ 或 $-\infty$). 令 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $y_n = n$, 对 $|x_n|$ 和 $|y_n|$ 应用斯图茨定理, 就得到了例 1-25 的结果.

【例 1-27】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$.

【解】 方法一 用数学归纳法证明 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

当 $n=1$, 因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, 不等式成立;

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$. 对于 $n=k+1$,

由于

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$, 即证 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$. 而此不等式

是恒成立的. 于是, 对于 $n=k+1$ 不等式也成立. 由归纳法得 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

因为 $0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$, 故原式 $= 0$.

方法二 令 $x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$, 则 $x_n^2 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}$.

于是, 有

$$0 < x_n^2 = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{(2n-1)}{(2n)^2} < \frac{2n-1}{(2n)^2} \rightarrow 0$$

故原式 $= 0$.

【例 1-28】 (电子科技大学 2003 年考研试题) 设 $f(x) =$

$$\begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{求 } f(g(x)), g(f(x)).$$

$$\begin{aligned} \text{【解】 } f(g(x)) &= \begin{cases} 1, & |g(x)| < 1 \\ 0, & |g(x)| = 1 \\ -1, & |g(x)| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1 \\ 0, & |e^x| = 1 \\ -1, & |e^x| > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$g(f(x)) = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ e^0 = 1, & |x| = 1. \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

【例 1-29】 (复旦大学 1999 年考研试题(以下注明某高校的均为考研试题)) 下列命题若正确, 给出证明, 否则举出反例.

(1) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中至少有一个为无穷小量 (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$).

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 为无穷大量, 又数列 $\{b_n\}$ 满足 $|b_n| > 0, n \geq 1$, 则数列 $\{a_n b_n\}$ 为无穷小量.

【解】 (1) 错误. 如设 $a_n = 1 + (-1)^n, b_n = 1 - (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (-1)^{2n}] = 0$, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + (-1)^n]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (-1)^n]$ 都不存在.

(2) 错误. 如设 $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$, 则 $|a_n|$ 、 $|b_n|$ 满足条件, 而 $a_n b_n = 1$, 即知 $|a_n b_n|$ 非无穷小量.

【例 1-30】 (复旦大学 1999 年) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 1 - \cos(\sin x) + a \ln(1+x^2)$ 是多少阶无穷小量 (a 为参数)?

$$\begin{aligned} \text{【解】 } f(x) &= 1 - \left[1 - \frac{1}{2!} \sin^2 x + \frac{1}{4!} \sin^4 x + o(x^6) \right] + \\ &\quad a \left[x^2 - \frac{1}{2} x^4 + o(x^6) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5) \right]^2 - \frac{1}{24} \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5) \right]^4 + \\ &\quad ax^2 - \frac{a}{2} x^4 + o(x^6) \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 - \frac{2}{6} x^4 + o(x^6) \right] - \frac{1}{24} [x^4 + o(x^6)] + \\ &\quad ax^2 - \frac{a}{2} x^4 + o(x^6) \\ &= \left(\frac{1}{2} + a \right) x^2 - \left(\frac{5}{24} + \frac{a}{2} \right) x^4 + o(x^6). \end{aligned}$$

若 $\frac{1}{2} + a \neq 0$, 即 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 为 x 的 2 阶无穷小; 若 $\frac{1}{2} + a = 0$, 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 则 $-\left(\frac{5}{24} + \frac{a}{2}\right) = -\left(\frac{5}{24} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24} \neq 0$, 此时 $f(x)$ 为 x 的 4 阶无穷小.

【例 1-31】 (电子科技大学 2001 年) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{ax+c} \right)^{hx+k}$, a, b, c, h, k 均为常数, $a, h \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{b}{ax}\right)^{hx+k}}{\left(1 + \frac{c}{ax}\right)^{hx+k}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{b}{ax}\right)^{\frac{ax}{b} \cdot \frac{b}{ax} (hx+k)}}{\left(1 + \frac{c}{ax}\right)^{\frac{ax}{c} \cdot \frac{c}{ax} (hx+k)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{bx}{a}} \cdot e^{\frac{bk}{a}}}{e^{\frac{cx}{a}} \cdot e^{\frac{ck}{a}}} = e^{\frac{(b-c)h}{a}}. \end{aligned}$$

【例 1-32】 (电子科技大学 2003 年) 若 $a > 0, b > 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(a^{\frac{1}{x}} -$

$\frac{1}{b^x}$).

【解】 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0^+$. 于是

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^t - b^t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (a^t \ln a - b^t \ln b) = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

【例 1-33】 (浙江大学 1999 年) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt[n]{n} - 1)}{\ln n}$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} \ln n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^x - 1}{-x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^x}{x \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \ln x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^x}{1 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} y^y = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1. \end{aligned}$$

【例 1-34】 (浙江大学 1999 年) 设函数 $f(t)$ 在 (a, b) 连续, 若有数列 $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow a$ ($x_n, y_n \in (a, b)$) 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = B$, 则对 A, B 之间的任意数 μ , 可找到数列 $z_n \rightarrow a$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \mu$.

【证明】 不妨设 $A < B$, 则 $A < \mu < B$. 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, 则对 $\varepsilon_1 = \frac{\mu - A}{2} > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon_1 \Rightarrow f(x_n) < A + \varepsilon_1 = A + \frac{\mu - A}{2} = \frac{\mu + A}{2} < \mu.$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = B$, 则对 $\varepsilon_2 = \frac{B - \mu}{2} > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|f(y_n) - B| < \varepsilon_2 \Rightarrow f(y_n) > B - \varepsilon_2 = B - \frac{B - \mu}{2} = \frac{B + \mu}{2} > \mu.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $f(x_n) < \mu < f(y_n)$. 又 $f(t)$ 在 (a, b) 连续, 则 $f(t)$ 在 $[x_n, y_n]$ 或 $[y_n, x_n]$ 连续. 根据连续函数的介值定理, 知 $\exists w_n \in [x_n, y_n]$ 或 $[y_n, x_n]$, 使 $f(w_n) = \mu$. 于是, 只要取 $z_n = x_n$ ($n \leq N$), $z_n = w_n$ ($n > N$), 就有 $f(z_n) \rightarrow \mu$ ($n \rightarrow \infty$).

【例 1-35】 (浙江大学 2000 年) 设 $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$, $n = 2, 3, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 $x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1} = -\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2}$, 反复应用此结果, 有

$$x_n - x_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (x_1 - x_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (b - a), \quad (n=2, 3, \dots)$$

于是

$$\begin{aligned} x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0) + x_0 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b - a) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (b - a) + \dots + (b - a) + a \\ &= (b - a) \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + a \rightarrow \frac{3}{2} (b - a) + a = \frac{3b - a}{2}. \end{aligned}$$

【例 1-36】 (浙江大学 2001 年) 用“ ϵ - N ”语言证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 + 2n - 3} = \frac{1}{3}$.

【证明】 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \max \left\{ 10, \left[\frac{6}{\epsilon} \right] \right\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 + 2n - 3} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{5n - 6}{3(3n^2 + 2n - 3)} \right| < \frac{6n}{n^2} = \frac{6}{n} < \epsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 + 2n - 3} = \frac{1}{3}$.

【例 1-37】 (浙江大学 2001 年) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$.

【解】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi \sqrt{n^2 + n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi \sqrt{n^2 + n} - 2n\pi)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [1 - \cos 2\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos 2\pi \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos \pi) = 1. \end{aligned}$$

【例 1-38】 (浙江大学 2002 年) 用“ ϵ - δ ”语言证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{x-3} = 0$.

【证明】 限制 $|x-1| < 1$, 则 $0 < x < 2$, 从而 $|x-2| < 2$, $|x-3| > 1$.

于是, $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{2} \right\}$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{(x-2)(x-1)}{x-3} - 0 \right| < 2|x-1| < \epsilon. \text{ 这就证明了结论.}$$

【例 1-39】 (浙江大学 2002 年) 给出一个一元函数 f , 在有理点都不连续、在无理点都连续, 并证明之.

【解】 取 $f(x) = R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ 互质}, q > p \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$. 下面证 $\forall x_0$

$\in (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$. $\forall \epsilon > 0$, 取充分大的 q_0 , 使 $\frac{1}{q_0} < \epsilon$, 易知, 在

$(x_0 - 1, x_0 + 1)$ 中, 使得 $0 < q \leq q_0$ 的分数只有有限多. 因此总能取到充分小的 $\delta > 0$, 使 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数分母 $q > q_0$. 故当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 则 $R(x) = 0$. 当有理数 $x = \frac{p}{q}$ 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 必有 $q > q_0$, 因而 $0 \leq R(x) = \frac{1}{q} < \frac{1}{q_0} < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$. 于是, f 在有理点都不连续、在无理点都连续.

【例 1.40】 (浙江大学 2002 年) 设 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, 数列 $\{x_n\}$ 由如下递推公式定义 $x_0 = 1, x_{n+1} = f(x_n), (n = 0, 1, 2, \dots)$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

分析 假设极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 值为 a , 则 $a = \frac{a+2}{a+1}, a^2 = a \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$. 因 $x_n > 0$, 负数不合题意, 故 $a = \sqrt{2}$. 下面研究 x_n 的分布情况.

$$\text{若 } x_n < \sqrt{2}, \text{ 则 } x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+1} = 1 + \frac{1}{x_n+1} > 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2};$$

$$\text{若 } x_n > \sqrt{2}, \text{ 则 } x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}.$$

即 x_n 在 $\sqrt{2}$ 的左右来回跳动, 而 $x_0 = 1 < \sqrt{2}$, 故 $x_0, x_2, \dots, x_{2n}, \dots < \sqrt{2}; x_1, x_3, \dots, x_{2n+1}, \dots > \sqrt{2} (n = 0, 1, 2, \dots)$. 从而考虑证 $\{x_{2n}\}$ 单调上升收敛于 $\sqrt{2}$, $\{x_{2n+1}\}$ 单调下降收敛于 $\sqrt{2}$.

【证明】 考察 $x_{n+2} - x_n$ 的符号,

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_n &= \frac{2+x_{n+1}}{1+x_{n+1}} - x_n = 1 + \frac{1}{1+x_{n+1}} - x_n = 1 + \frac{1}{1+\frac{2+x_n}{1+x_n}} - x_n \\ &= 1 + \frac{1+x_n}{3+2x_n} - x_n = \frac{2(2-x_n^2)}{3+2x_n} = \frac{2(\sqrt{2}+x_n)(\sqrt{2}-x_n)}{3+2x_n} \begin{cases} > 0, x_n < \sqrt{2} \\ < 0, x_n > \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

由 $x_{2n} < \sqrt{2}, x_{2n+1} > \sqrt{2} (n = 0, 1, 2, \dots)$ 知, $\{x_{2n}\}$ 单调上升有上界 $\sqrt{2}$, $\{x_{2n+1}\}$ 单调下降有下界 $\sqrt{2}$. 应用单调有界原理, $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n+1}\}$ 都收敛. 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} =$

$\alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \beta$. 在 $x_{2n+2} = \frac{2+x_{2n+1}}{1+x_{2n+1}}$ 及 $x_{2n+1} = \frac{2+x_{2n}}{1+x_{2n}}$ 两端取极限分别得

$$\alpha = \frac{2+\beta}{1+\beta}, \beta = \frac{2+\alpha}{1+\alpha}. \text{ 解得 } \alpha = \beta = \sqrt{2}. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}.$$

【例 1.41】 (东南大学 2003 年) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3}$.

【解】 $S_1 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{1}{6}(2n)(2n+1)(4n+1),$

$$S_2 = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = S_1 - S_2 = \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1),$$

$$\text{故原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3n^3} = \frac{4}{3}.$$

【例 1-42】 (东南大学 2003 年) 设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

【证明】 方法一 若 $x_1 = \sqrt{2}$, 则 $x_n = \sqrt{2}$ ($n = 2, 3, \cdots$). 从而 $\{x_n\}$ 收敛且极限为 $\sqrt{2}$. 设 $f(x) = \frac{2(1+x)}{2+x}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为严格单调上升函数. 设 $x_1 > \sqrt{2}$, 则由 $x_{n+1} = f(x_n) > f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ 知, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $x_n > \sqrt{2}$. 由 $x_{n+1} - x_n = \frac{2-x_n^2}{2+x_n} < 0$ 知, $\{x_n\}$ 单调下降. 同理可知, 当 $x_1 < \sqrt{2}$ 时, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $x_n < \sqrt{2}$, 且 $\{x_n\}$ 单调增加. 总之, $\{x_n\}$ 单调有界, 故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设为 a . 在 $x_{n+1} = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$ 两端取极限得, $a = \frac{2(1+a)}{2+a}$, 解得 $a = \sqrt{2}$.

方法二 设 $f(x) = \frac{2(1+x)}{2+x}$. 因 $x_n > 0$, 由于 $f'(x) = \frac{2}{(2+x)^2} < \frac{1}{2} < 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$, $x_{n+1} = f(x_n)$ 为压缩映象, 从而 $\{x_n\}$ 收敛, 同“方法一”可求得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

【例 1-43】 (东南大学 2004 年) 判断题: 连续函数把有限闭区间映成有限闭区间, 即若函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 则 $f([a, b])$ 也必定是某个有限闭区间 $[c, d]$.

【解】 正确. 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 由最值定理知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 必能达到最大值 d 和最小值 c . 不妨设 $f(a) = c$, $f(b) = d$. 由介值定理知, $\forall \mu \in (c, d)$, $\exists x_0 \in [a, b]$, 使 $f(x_0) = \mu$.

【例 1-44】 (上海交通大学 1999 年) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$.

【解】 考察幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$. 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

所以该幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{e}$, 而 $\frac{1}{3} < \frac{1}{e}$. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 收敛, 根据级数收敛的必要条件得, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n} = 0$.

【例 1-45】 (上海交通大学 1999 年) 判断题: 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续且有界, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 必一致连续.

【解】 错误. 例如, $f(x) = \sin x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 连续且 $|f(x)| \leq 1$. 若取

$$x'_n = \sqrt{2n\pi}, \quad x''_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ 则}$$

$$|x'_n - x''_n| = \left| \sqrt{2n\pi} - \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \right| = \frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{2n\pi + (\pi/2)}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

而 $|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left| \sin 2n\pi - \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 1 \nrightarrow 0$. 这说明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 非一致连续.

【例 1-46】 (上海交通大学 2000 年) 判断题: $f(x)$ 在 (a, b) 内连续的充要条件是对 $\forall [\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 一致连续.

【证明】 正确. 必要性. 因 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, 而 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 于是 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 连续, 根据康托定理, $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 一致连续.

充分性. $\forall x_0 \in (a, b)$, 取 $\alpha = \frac{a+x_0}{2}$, $\beta = \frac{x_0+b}{2}$, 则 $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$. 而 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 一致连续, 故 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 连续, 从而 $f(x)$ 在 x_0 点连续. 由 x_0 的任意性, 知 $f(x)$ 在 (a, b) 连续.

【例 1-47】 (上海交通大学 2003 年) 设对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x) = f(x^2)$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处连续, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为常数.

【证明】 设 $x > 0$, 由 $f(x) = f(x^2)$, 有 $f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = \dots = f(x^{\frac{1}{2^n}}) = \dots$, 因此 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$; 当 $x < 0$ 时, $f(x) = f(x^2) = f(1)$; $x=0$ 时, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(1)$. 故 $f(x) \equiv f(1)$ (常数).

【例 1-48】 (上海交通大学 2003 年) 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ($n \geq 2$), 且 $f(x) = \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{1}{x} \ln \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right\} \\
&= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a_1^x + \cdots + a_n^x) - \ln n}{x} \right\} \\
&= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + \cdots + a_n^x} \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n} \right\} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.
\end{aligned}$$

第二章 实数理论的基本定理

整个数学分析是建立在实数理论与极限理论基础上的, 有关实数理论的一些基本定理对学习数学分析的学生来说既是一个重点, 又是一个难点. 它是一元函数数学分析理论的总结和提高, 是以后进一步学习的必备条件.

§1 实数连续性及其等价描述

一、基本要求

1. 理解实数集的确界, 覆盖, 区间套, 子数列, 柯西基本列的概念.
2. 掌握实数连续性的概念及实数基本定理(戴德金实数连续性定理), 掌握确界存在原理、单调有界原理、有限覆盖定理、区间套定理、紧致性定理、柯西收敛原理, 理解它们的相互等价性, 掌握相互证明的基本思路和方法.
3. 掌握应用上述定理证明闭区间上连续函数的性质(有界性定理、最大值最小值定理、介值定理、一致连续性定理)的基本思路和方法.

二、主要概念和结论

1. 几个有关定义

(1) 戴德金连续性准则 如果一个有大小顺序的稠密的数系 S , 对它的任一个分划, 都有 S 中惟一的数存在, 它不小于下类中的每个数, 也不大于上类中的每一个数, 那么称数系 S 是连续的

(2) 上、下确界 设 A 是非空实数集, $\beta \in \mathbb{R}$, 若① $\forall x \in A$, 有 $x \leq \beta$; ② $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A$, 使得 $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$. 则称 β 为 A 的上确界, 记为 $\beta = \sup A$ 或 $\beta = \sup_{x \in A} x$.

类似地, 称 α 为数集 A 的下确界, 如果① $\forall x \in A$, 有 $x \geq \alpha$; ② $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A$, 使得 $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

(3) 区间套 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一组实数的闭区间构成的序列, 满足

① $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$; ② $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则称

$\{[a_n, b_n]\}$ 构成一个区间套.

(4) 覆盖 设 E 是一开区间集(即 E 的元素为开区间), S 是一实数集合, 如果 $\forall x \in S$, 存在区间 $(a, b) \in E$, 使得 $x \in (a, b)$, 则称 E 是 S 的一个覆盖.

(5) 柯西基本列 在数系 S 中, 若数列 $\{x_n\} \subset S$ 满足 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n, m > N$, 有 $|x_n - x_m| < \epsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为 S 的柯西基本列, 简称基本列.

(6) 完备性 如果数系 S 中的每个基本列都在 S 中存在极限, 则称 S 是完备的.

2. 实数连续性的基本定理

(1) 实数基本定理(戴德金实数连续性定理) 实数系 \mathbb{R} 按戴德金连续性准则是连续的. 即对 \mathbb{R} 的任一分划 $A|B$, 都存在惟一的实数 r , 它大于或等于下类 A 的每一个实数, 小于或等于上类 B 中的每一个实数.

(2) 确界存在原理 在实数系 \mathbb{R} 内, 非空的有上(下)界的数集必有上(下)确界存在.

(3) 单调有界原理 单调上升(下降)有上(下)界的数列必有极限.

(4) 有限覆盖定理 闭区间 $[a, b]$ 的任一个覆盖, 必存在有限的子覆盖.

(5) 区间套定理 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套, 则必存在惟一的实数 r , 属于每一个闭区间 $[a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$, 即 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

(6) 紧致性定理 有界数列必有收敛的子数列(又称致密性定理或魏尔斯特拉斯定理).

(7) 柯西收敛原理 数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \epsilon$.

数列 $\{x_n\}$ 不收敛 $\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n_0, m_0 > N$, 使 $|x_{n_0} - x_{m_0}| \geq \epsilon_0$.

(8) 聚点原理 有界无穷点集至少有一聚点.

以上 8 个定理从不同角度描述了实数的连续性, 它们之间是相互等价的. 确界存在原理与戴德金实数连续性定理事实上可以归结为一个定理, 很多教材是从确界存在原理出发而展开整个极限理论讨论的, 所以它们一起被称为实数连续性定理.

收敛数列必有界, 反之则不然. 单调有界原理、紧致性定理和聚点原理进一步说明了数列收敛与有界之间的深层次联系. 有界数列虽不一定收敛, 但一定有收敛的子列. 有界数列若单调则必然收敛. 而数列收敛的充要条件, 或者说其本质属性是该数列成为柯西基本列.

区间套定理和有限覆盖定理刻画了局部性质和整体性质之间的关系. 区间套定理通过构造满足某种性质的区间套, 从而推出某点的局部性质. 而有限覆盖定理则恰恰相反, 通过肯定或否定局部性质而获得整体性质. 用这两种方法证明题目时, 注意多体会其中的思想.

三、常用解题方法与典型例题

【例 2-1】求数列 $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$ 的上、下确界.

【解】考虑数列 $x'_n = (1+2^n)^{\frac{1}{n}}$, 因为

$$\frac{x'_{n+1}}{x'_n} = \frac{(1+2^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}}{(1+2^n)^{\frac{1}{n}}} = \left[\frac{(1+2^{n+1})^n}{(1+2^n)^{n+1}} \right]^{\frac{1}{n(n+1)}} < \left[\frac{(1+2^{n+1})^n}{(2+2^n)^n} \right]^{\frac{1}{n(n+1)}} < 1,$$

所以 $|x'_n|$ 单调下降, 从而 $|x_{2k}|$ 单调下降. 同理 $x''_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} (1+2^n)^{\frac{1}{n}}$ 也单调下降. 于是 $|x_{2k-1}|$ 单调下降. 又因为 $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \sqrt{5}$, $x_2 > x_1$, 故 $\sup |x_n| = \sqrt{5}$. 而 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 2$, 故 $\inf |x_n| = 1$.

(这里用到 $2 = (2^n)^{\frac{1}{n}} < (1+2^n)^{\frac{1}{n}} < (2^n+2^n)^{\frac{1}{n}} = 2\sqrt[n]{2} \rightarrow 2, n \rightarrow \infty$).

【例 2-2】设 $\beta = \sup E$, 且 $\beta \in E$, 试证自 E 中可选取数列 $|x_n|$ 且 x_n 互不相同, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta$; 又若 $\beta \notin E$, 则情形如何?

【证明】(1) 由于 $\beta = \sup E$, 且 $\beta \in E$, 则有 ① $\forall x \in E$, 有 $x < \beta$; ② $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E$, 使 $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$.

取 $\varepsilon_1 = 1$, 则 $\exists x_1 \in E$, 使 $\beta - 1 < x_1 < \beta$;

$$\varepsilon_2 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \beta - x_1 \right\}, \text{ 则 } \exists x_2 \in E, \text{ 使 } \beta - \varepsilon_2 < x_2 < \beta; \dots$$

如此下去, 便得到一数列 $|x_n|$ 满足 $x_n \in E$, $\beta - \frac{1}{n} < x_n < \beta$, $x_{n-1} < x_n < \beta$, $n = 1, 2, \dots$. 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta$.

(2) 对于 $\beta \notin E$ 情形, 则上述结果不成立.

如 $E_1 = [1, 2]$, 则 $\beta = \sup E_1 = 2 \in E_1$, 可取 $x_n = 2 - \frac{1}{n} \in [1, 2]$, 则有各 x_n 互不相同且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 = \beta$.

如 $E_2 = (1, 2]$, 则 $\beta = \sup E_2 = 2 \notin E_2$, 但却找不到互不相同的 $x_n \in (1, 2]$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 = \beta$.

【例 2-3】 若 $\{x_n\}$ 无界, 且非无穷大量, 则必存在两个子列 $x_{n_k} \rightarrow \infty$, $x_{m_k} \rightarrow a$ (a 为有限数) ($k \rightarrow \infty$).

【证明】 因 $\{x_n\}$ 无界, 故 $\forall G > 0$, $\exists n_G \in \mathbb{N}^+$, 使得 $|x_{n_G}| > G$. 特别,

取 $G=1$, 则 $\exists n_1 \in \mathbb{N}^+$, 使得 $|x_{n_1}| > 1$;

取 $G=2$, 则 $\exists n_2 \in \mathbb{N}^+$, $n_2 > n_1$, 使得 $|x_{n_2}| > 2$; ...

如此继续下去, 便得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 显然 $x_{n_k} \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). 又 $\{x_n\}$ 非无穷大量, 所以 $\exists M > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, $\exists n_N > N$, 使 $|x_{n_N}| \leq M$. 于是在 $[-M, M]$ 内含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项, 按照它们在 $\{x_n\}$ 中的顺序组成了一新的数列, 注意它是 $\{x_n\}$ 的子列且有界, 根据紧致性定理, 该子列必有收敛的子列 $\{x_{m_k}\}$, 设 $x_{m_k} \rightarrow a \in [-M, M]$ ($k \rightarrow \infty$) 即可.

【例 2-4】 有界数列 $\{x_n\}$ 若不收敛, 则必存在两个子列 $x_{n_k} \rightarrow a$, $x_{m_k} \rightarrow b$ 且 $a \neq b$.

【证明】 不妨设 $a \leq x_n \leq \beta$, $n=1, 2, \dots$. 由紧致性定理, $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 且 $x_{n_k} \rightarrow a \in [a, \beta]$ ($k \rightarrow \infty$). 下面证明存在另一个子列 $\{x_{m_k}\}$ 收敛, 但其极限异于 a . 若 $\forall \varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之外只有有限个 x_n , 则 $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), 这与 $\{x_n\}$ 发散矛盾. 从而 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使在 $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ 之外有无穷多个 x_n , 于是把落在 $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ 之外的 x_n 按它们在 $\{x_n\}$ 中的顺序重新组成一新的数列, 它是 $\{x_n\}$ 的子列, 从而有界. 所以此新数列中必有一收敛子列, 记为 $\{x_{m_k}\}$, 设 $x_{m_k} \rightarrow b$ ($k \rightarrow \infty$), 则 $b \neq a$. $\{x_{m_k}\}$ 也是 $\{x_n\}$ 的子列.

【例 2-5】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 定义, 且在每一点处函数的极限存在, 求证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界.

【证明】 用有限覆盖定理. 因为 $\forall x_0 \in [a, b]$, $f(x)$ 在 x_0 有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 (若 $x_0 = a$ 或 b , 考虑其右极限或左极限), 由函数极限的局部有界性定理知, $\exists \delta_0 > 0$, $M_0 > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \cap [a, b]$, $|f(x)| \leq M_0$. 构造开区间族

$$E = \{(x - \delta_x, x + \delta_x) \mid x \in [a, b]\},$$

则 E 为 $[a, b]$ 的一个覆盖. 由有限覆盖定理知, 可以从 E 中选出有限个开区间覆盖 $[a, b]$, 记为

$$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2), \dots, (x_k - \delta_k, x_k + \delta_k).$$

又当 $x \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap [a, b]$ 时, 有 $|f(x)| \leq M_i$, $i=1, 2, \dots, k$. 取 $M = \max_{1 \leq i \leq k} M_i$, 则 $\forall x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq M$. 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界.

【例 2-6】 求证数列 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限不存在.

【证明】 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 取 $n_0 = N + 1$, $m_0 = 2n_0$, 则 $n_0, m_0 > N$,

$$|x_{m_0} - x_{n_0}| = \frac{1}{\sqrt{n_0+1}} + \frac{1}{\sqrt{n_0+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n_0}} \geq \frac{n_0}{\sqrt{2n_0}} > \frac{1}{2} = \epsilon_0.$$

由柯西收敛原理知, $|x_n|$ 不收敛.

【例 2-7】 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可导, $|f'(x)|$ 单调下降, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 求证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0$.

【证明】 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 根据柯西收敛原理, $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > \max\{0, a\}$, $\forall x > X$, 有 $|f(2x) - f(x)| < \epsilon$. 因为 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可导, 对任意的 $x > X$, $f(x)$ 在 $[x, 2x]$ 满足拉格朗日中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x, 2x)$, 使

$$f(2x) - f(x) = f'(\xi)(2x - x) = xf'(\xi).$$

由于 $|f'(x)|$ 单调下降, 而 $\xi < 2x$, 故 $|f'(2x)| \leq |f'(\xi)|$. 所以当 $x > X$ 时, $|xf'(2x)| \leq |xf'(\xi)| = |f(2x) - f(x)| < \epsilon$, 即 $|2xf'(2x)| < 2\epsilon$. 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0$.

【例 2-8】 利用柯西收敛原理讨论数列 $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 的收敛性.

【解】 $\forall n, p \in \mathbb{N}^+$,

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+3} \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p+1} \frac{1}{n+p} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{1}{n+p} \right|. \end{aligned}$$

若 p 为奇数, 则有

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) \right| < \frac{1}{n+1};$$

若 p 为偶数, 则有

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1} \right) - \frac{1}{n+p} \right| \\ &< \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^+$, 有

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

由柯西收敛原理知, $\{x_n\}$ 收敛.

【例 2-9】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导, 且 $|f'(x)| \leq k < 1$, 任给 x_0 , 令 $x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$.

求证 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在; (2) 上述极限为 $x = f(x)$ 的根, 且是惟一的.

【证明】 (1) $\forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$, $f(x)$ 在 $[x', x'']$ 或 $[x'', x']$ 满足拉格朗日中值定理的条件, 故存在 ξ 介于 x' 与 x'' 之间, 使得

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)(x' - x'')|. \text{ 又 } |f'(x)| \leq k < 1, \text{ 从而 } |f(x') - f(x'')| \leq k |x' - x''|. \text{ 所以,}$$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k |x_n - x_{n-1}| = k |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \\ &\leq k^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq k^n |x_1 - x_0|, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

于是 $\forall m > n$,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_1 - x_0| (k^{m-1} + k^{m-2} + \dots + k^n) \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由柯西收敛原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$, 由 $x_{n+1} = f(x_n)$ 及 $f(x)$ 在 r 点的连续性得, $r = f(r)$. 因此 r 是 $x = f(x)$ 的根 (称 r 为 $f(x)$ 的不动点). 若有 $r' \neq r$ 也是 $x = f(x)$ 的根, 则有 $0 < |r' - r| = |f(r') - f(r)| \leq k |r' - r| < |r' - r|$. 矛盾.

【例 2-10】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 满足条件

(1) 存在 $0 < k < 1$ 使得 $|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|, \forall x, y \in [a, b]$;

(2) $f(x)$ 的值域包含在 $[a, b]$ 内.

则对任意 $x_0 \in [a, b]$, 令 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 0, 1, 2, \dots)$, 有

① $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在;

② 方程 $x = f(x)$ 的解在 $[a, b]$ 是惟一的, 这个解就是上述极限值.

【证明】 由 $f([a, b]) \subset [a, b]$ 知, $\{x_n\} \subset [a, b]$.

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+p}| &= |f(x_{n-1}) - f(x_{n+p-1})| \leq k |x_{n-1} - x_{n+p-1}| \\ &\leq k^2 |x_{n-2} - x_{n+p-2}| \leq \dots \leq k^n |x_0 - x_p| \leq k^n |a - b| = k^n (b - a). \end{aligned}$$

因此 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{\ln \varepsilon - \ln(b-a)}{\ln k} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $\forall p \in \mathbb{N}^+$, 就有

$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$. 根据柯西收敛原理, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$, 则 $r \in [a, b]$. 从不等式 $|f(x_n) - f(r)| \leq k |x_n - r|$ 可得, 数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(r)$. 在 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边令 $n \rightarrow \infty$, 得 $r = f(r)$. 因此 r 是 $x = f(x)$ 的根. 如果 $x = f(x)$ 在 $[a, b]$ 还有根 $r' \neq r$, 即 $r' = f(r')$, 则有 $|r - r'| = |f(r) - f(r')| \leq k |r - r'| < |r - r'|$, 矛盾. 故 r 是 $x = f(x)$ 在 $[a, b]$ 唯一的根.

注 本题要证明的结论并不需要函数 $f(x)$ 的连续性. 另外, 例 2-9 和例 2-10 是压缩映象原理即巴拿赫不动点原理的两种具体表述.

§2 闭区间上连续函数的性质

一、基本要求

1. 理解函数的一致连续性概念.
2. 掌握闭区间上连续函数的性质及其证明方法.

二、主要概念和结论

1. 一致连续的定义 设函数 $f(x)$ 在集合 I 定义, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 一致连续.

函数 $f(x)$ 在 I 不一致连续 $\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in I$, 使 $|x_1 - x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon_0$.

2. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性定理 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界.

(2) 零点存在定理 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

介值定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x), m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, 则 $\forall c \in [m, M], \exists \xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = c$.

(3) 最值定理 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 达到最大值与最小值.

(4) 一致连续性定理(康托定理) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 一致连续.

三、常用解题方法与典型例题

【例 2-11】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 并且最大值点 x_0 是惟一的, 又设 $x_n \in [a, b]$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

【证明】 用反证法. 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq x_0$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N$, 使 $|x_n - x_0| \geq \varepsilon_0$. 这说明在 $(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)$ 之外有无穷多个 x_n . 由于它们是有界的, 根据紧致性定理, 存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $x_{n_k} \rightarrow r \in [a, b] (k \rightarrow \infty)$, 这时 $r \neq x_0$. 又 $f(x)$ 在 r 点连续, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(r)$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. 根据极限的惟一性, $f(r) = f(x_0)$. 又因为 x_0 是惟一的极大值点, 而 $r \neq x_0$, 所以 $f(r) < f(x_0)$. 矛盾.

【例 2-12】 设 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 连续, 且 $f(0) = f(2a)$, 求证 $\exists x_0 \in [0, a]$, 使 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

【证明】 作辅助函数 $F(x) = f(x+a) - f(x), x \in [0, a]$. 由于 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 连续, 因此 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 连续, $F(0) = f(a) - f(0), F(a) = f(2a) - f(a) = f(0) - f(a)$. 若 $F(0) = -F(a) = 0$, 则只要取 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = a$, 便有 $f(x_0) = f(x_0 + a)$. 若 $F(0) = -F(a) \neq 0$, 则 $F(0) \cdot F(a) = -F^2(0) < 0$, 由零点存在定理, $\exists x_0 \in [0, a]$, 使 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

【例 2-13】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且取值为整数, 求证 $f(x) \equiv \text{常数}$.

【证明】 用反证法. 假设 $\exists x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$, 使 $f(x_1) = N_1, f(x_2) = N_2$, 其中 $N_1 < N_2, N_1, N_2 \in \mathbb{N}^+$. 不妨设 $x_1 < x_2$, 作辅助函数

$$F(x) = f(x) - N_1 - \frac{1}{2}, x \in [x_1, x_2] \subset [a, b].$$

则 $F(x_1) = f(x_1) - N_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0, F(x_2) = f(x_2) - N_1 - \frac{1}{2} = N_2 - N_1 - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} > 0$. 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续知, $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 连续. 于是根据零点存在定理, $\exists x_0 \in (x_1, x_2) \subset [a, b]$, 使 $F(x_0) = f(x_0) - N_1 - \frac{1}{2} = 0$, 即 $f(x_0) = N_1 + \frac{1}{2}$. 而 $N_1 + \frac{1}{2}$ 不是整数, 矛盾.

【例 2-14】 设 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续, $a, b \neq \pm \infty$, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 有界.

【证明】 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续, 由例 2-24 知, $f(a+0), f(b-0)$ 均存在. 定义

$$f(a) = f(a+0), f(b) = f(b-0),$$

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 由有界性定理, 知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 从而 $f(x)$ 在 (a, b) 有界.

注 当 $a = -\infty$ 或 $b = +\infty$ 时, 结论不成立. 例如, $f(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续, 但它在 $(-\infty, +\infty)$ 无界.

【例 2-15】 用一致连续的定义证明若函数 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 都一致连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 一致连续.

【证明】 因 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 一致连续, 故 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x', x'' \in [a, c]$, 当 $|x' - x''| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}$; $\exists \delta_2 > 0, \forall x', x'' \in [c, b]$, 当 $|x' - x''| < \delta_2$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\forall x', x'' \in [a, b]$, $x' < x''$, $|x' - x''| < \delta$. 若 $x' < c < x''$, 则从 $|x' - x''| < \delta$ 推出 $|x' - c| < \delta_1, |x'' - c| < \delta_2$, 因此

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(c)| + |f(x'') - f(c)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

对于其他情形, x', x'' 或同属于 $[a, c]$ 或同属于 $[c, b]$, 当然有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. 这就证明了 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 一致连续.

注 类似可证若函数 $f(x)$ 在 $(a, c]$ 和 $[c, b)$ 都一致连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续, 且当 $a = -\infty$ 或 $b = +\infty$ 时, 结论仍成立.

【例 2-16】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续.

【证明】 设 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$. 则 $\forall \epsilon > 0, \exists X_1 > 0$, 当 $x < -X_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}$; $\exists X_2 > 0$, 当 $x > X_2$ 时, 有 $|f(x) - B| < \frac{\epsilon}{2}$. 又由康托定理知, $f(x)$ 在 $[-X_1 - 1, X_2 + 1]$ 一致连续, 故 $\exists \delta_1 > 0, \forall x', x'' \in [-X_1 - 1, X_2 + 1]$, 当 $|x' - x''| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. 因此 $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$, 则当 $x', x'' \in (-\infty, +\infty)$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 必有 x', x'' 或同属于 $[-X_1 - 1, X_2 + 1]$, 或同属于 $(-\infty, -X_1)$, 或同属于 $(X_2, +\infty)$. 若 $x', x'' \in [-X_1 - 1, X_2 + 1]$, 则 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$; 若 $x', x'' < -X_1$, 则有

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon;$$

若 $x', x'' > X_2$, 则同样有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. 故总有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续.

注 此例是例 2-24 对无穷区间的情形, 但逆不成立. 例如, $f(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续, 但 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 都不存在.

【例 2-17】 若 $f(x)$ 在区间 X (有穷或无穷) 具有有界的导数, 即 $|f'(x)| \leq M, \forall x \in X$, 则 $f(x)$ 在 X 一致连续.

【证明】 $\forall x_1, x_2 \in X$, 对 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 或 $[x_2, x_1]$ 应用拉格朗日中值定理得, $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, ξ 介于 x_1 与 x_2 之间. 因此 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)(x_2 - x_1)| \leq M|x_2 - x_1| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

这就证明了 $f(x)$ 在 X 一致连续.

【例 2-18】 求证 $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 一致连续.

【证明】 $f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} - (2 + \ln x) \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$. 于是, 当 $x > 1$ 时, $f''(x) < 0$, 即 $f'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 严格单调下降, 而 $f'(1) = 1$, 于是 $\forall x \in [2, +\infty)$, $|f'(x)| = f'(x) \leq f'(2) < f'(1) = 1$. 从而由例 2-17 知, $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 一致连续. 另外, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$, 由例 2-24 知, $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 一致连续. 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 一致连续.

【例 2-19】 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 求证 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 不一致连续.

【证明】 取 $\varepsilon_0 = 1$, $\forall \delta > 0$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则 $\exists X > \max\{a, 0\}$, 当 $x > X$ 时, 有 $f'(x) > \frac{2}{\delta}$. 现取 $x' = X + \delta$, $x'' = X + \frac{\delta}{2}$, 则 $|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$. 由拉格朗日中值定理得, $|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)(x' - x'')| > \frac{2}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = 1 = \varepsilon_0$, 其中 $x'' < \xi < x'$. 故 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 不一致连续.

【例 2-20】 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 中必有 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

【证明】 设 $f(x_k) = \max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|$, $f(x_l) = \min_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|$. 若 $f(x_k) = f(x_l)$, 则 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n)$, 所以 $\frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] = f(x_1)$, 于是令 $\xi = x_1$ 即可. 若 $f(x_k) \neq f(x_l)$, 则 $f(x_k) > f(x_l)$, 不妨设 $x_k < x_l$. 因为

$$f(x_l) \leq \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \leq f(x_k),$$

及 $f(x)$ 在 $[x_k, x_l]$ 连续, 由介值定理知, $\exists \xi \in [x_k, x_l] \subset [x_1, x_n]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

【例 2-21】 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且不存在 $x \in [a, b]$, 使 $f(x) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 恒正或恒负.

【证明】 用反证法. 假设 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使 $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$. 不妨设 $x_1 < x_2$, 由 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 的连续性, 根据零点存在定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset [a, b]$, 使 $f(\xi) = 0$. 矛盾. 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 恒正或恒负.

【例 2-22】 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 为单调上升函数, 值域为 $[f(a), f(b)]$, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

【证明】 用反证法. 假设 $f(x)$ 在某点 $c \in [a, b]$ 不连续, 不妨设 $c \in (a, b)$, 根据单调有界函数必有极限, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ 均存在. 从而有 $f(c-0) \neq f(c)$, 或 $f(c+0) \neq f(c)$. 下设 $f(c-0) \neq f(c)$, 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 单调上升, 则应有 $f(c-0) < f(c)$, 于是 $\forall x \in [a, b]$ 且 $x < c$ 时, $f(x) \leq f(c-0)$; 当 $x \geq c$ 时, $f(x) \geq f(c)$. 从而对于 $f(c-0)$ 与 $f(c)$ 之间的任一值, 在 $[a, b]$ 中找不到点与之对应, 矛盾.

【例 2-23】 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续且有界, 对任意 $a \in (-\infty, +\infty)$, $f(x) = a$ 在 $[0, +\infty)$ 只有有限个根或无根, 求证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

【证明】 方法一 用反证法. 假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在. 由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界, 根据例 2-4 的结论, $\exists \{x_n^{(1)}\}, \{x_n^{(2)}\} \subset [0, +\infty)$ 满足 $x_n^{(1)} \rightarrow +\infty, x_n^{(2)} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 及 $f(x_n^{(1)}) \rightarrow M_1, f(x_n^{(2)}) \rightarrow M_2 (n \rightarrow \infty)$, 且 $M_1 \neq M_2$. 不妨设 $M_1 < M_2$. 由极限的性质, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $f(x_n^{(1)}) < \frac{M_1 + M_2}{2} < f(x_n^{(2)})$. 又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 由介值定理, $\forall n > N$, 在 $x_n^{(1)}$ 与 $x_n^{(2)}$ 之间都存在一个 ξ_n , 使 $f(\xi_n) = \frac{M_1 + M_2}{2}$. 从而对于方程 $f(x) =$

$\frac{M_1 + M_2}{2}$, 它在 $[0, +\infty)$ 就有无限多个根了. 矛盾.

方法二 因 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界, 故存在 m, M 使 $m < f(x) < M, \forall x \in [0, +\infty)$. 记 $[m_1, M_1] = [m, M]$. 将 $[m_1, M_1]$ 二等分, 则 $\exists X_1 > 0$, 当 $x > X_1$ 时, $f(x)$ 必完全位于 $\left[m_1, \frac{m_1 + M_1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{m_1 + M_1}{2}, M_1\right]$ 之一内. 否则, 因 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 由介值定理可得, $f(x) = \frac{m_1 + M_1}{2}$ 在 $[0, +\infty)$ 有无限多个实根, 矛盾. 记此区间为 $[m_2, M_2]$. 将 $[m_2, M_2]$ 二等分, 同理可得, $\exists X_2 > 0$, 当 $x > X_2$ 时, $f(x)$ 必完全位于 $\left[m_2, \frac{m_2 + M_2}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{m_2 + M_2}{2}, M_2\right]$ 之一内. 记此区间为 $[m_3, M_3], \dots$, 继续下去, 得到区间套 $\{[m_n, M_n]\}$, 对其中每一个区间 $[m_n, M_n]$, $\exists X_n > 0$, 当 $x > X_n$ 时, $f(x)$ 必完全位于 $[m_n, M_n]$ 内. 由区间套定理, $\exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [m_n, M_n]$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \xi$. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $|M_N - m_N| < \epsilon$. 从而当 $x > X_N$ 时, $|f(x) - \xi| \leq |M_N - m_N| < \epsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

§3 综合例题

【例 2.24】(东北大学 1999 年) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 求证 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在.

【证明】 必要性. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. 若 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $0 < x_1 - a < \frac{\delta}{2}, 0 < x_2 - a < \frac{\delta}{2}$, 则 $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - a| + |x_2 - a| < \delta$, 于是, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. 由函数极限的柯西收敛原理知, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在. 同理可证 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在.

充分性. 定义函数

$$F(x) = \begin{cases} f(a+0), & x = a \\ f(x), & x \in (a, b), \\ f(b-0), & x = b \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 由康托定理知, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 一致连续, 从而 $F(x)$ 在 (a, b) 一致连续. 又当 $x \in (a, b)$ 时, $F(x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续.

【例 2-25】 利用紧致性定理证明单调有界原理.

【证明】 提示: 由紧致性定理推出, $\{x_n\}$ 必有一收敛子列, 设其极限为 a , 然后证明 $\{x_n\}$ 必收敛于 a . (也可用柯西收敛原理证)

【例 2-26】 利用单调有界原理证明紧致性定理.

【证明】 先证明任何数列必有一单调子列. 考虑集合 $T_m = \{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\}$, $m = 1, 2, \dots$, 有且仅有以下两种情形.

(1) 每个 T_m 有最大值, 取 $x_{n_1} = \max T_1$, $x_{n_2} = \max T_2$, \dots , $x_{n_k} = \max T_k$, \dots . 显然 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的单调下降子列.

(2) 存在某个集合 $T_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$, T_k 无最大值. 从而当 $m > k$ 时, T_m 也无最大值. 取 $x_{n_1} = x_k$, 则 x_{k+1}, x_{k+2}, \dots 中必有某个大于 x_k , 记为 x_{n_2} , 于是 $x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \dots$ 中必有某个大于 x_{n_2} , 记为 x_{n_3} , \dots , 如此继续下去, 得到子列 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的单调上升子列.

再证明紧致性定理. 设 $\{x_n\}$ 为有界数列. 由上知必存在一单调子列 $\{x_{n_k}\}$, 它也是有界的. 故由单调有界原理知, $\{x_{n_k}\}$ 收敛.

【例 2-27】 (电子科技大学 2002 年) 叙述(1)有限覆盖定理和(2)魏尔斯特拉斯定理(致密性定理), 并用(1)证明(2).

【证明】 (1)有限覆盖定理 若开区间所成的区间集 E 覆盖闭区间 $[a, b]$, 则总可以从 E 中选出有限个区间覆盖 $[a, b]$.

(2) 魏尔斯特拉斯定理 任一有界数列必有收敛的子列.

设 $\{x_n\}$ 有界, 即 $\exists a, b$, 使 $x_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$. 若 $\{x_n\}$ 中有一值出现无穷多次, 则 $\{x_n\}$ 有常值子列以本身为极限. 不失一般性, 设 $x_n \neq x_m$ ($n \neq m$), 可以证明 $[a, b]$ 中至少存在一点 ξ , 它的任何邻域都含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项. 若不然, $\forall c \in [a, b]$, 都有邻域 $(c - \delta_c, c + \delta_c)$, 除 c 本身外, 不含 $\{x_n\}$ 中的点, 记 $E = \{(c - \delta_c, c + \delta_c) \mid a \leq c \leq b\}$, 则 E 是 $[a, b]$ 的一个覆盖. 由有限覆盖定理知, E 中存在有限个开区间覆盖 $[a, b]$, 而这有限个开区间仅含有 $\{x_n\}$ 中有限个点, 与 $[a, b]$ 中包含 $\{x_n\}$ 所有的点矛盾. 从而可从 $\{x_n\}$ 中选出子列收敛于 ξ .

【例 2-28】 利用有限覆盖定理证明区间套定理.

【证明】 提示: 设 $\{[a_n, b_n] \mid n = 1, 2, \dots\}$ 为区间套. 只需证 $\exists \xi \in$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ 即可. 若不然, 则 $\forall x \in [a_1, b_1], x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 而由于区间套的包含关系, 必存在 $n_x, \forall k \geq n_x, x \notin [a_k, b_k]$. 所以必存在 $(\delta_x > 0)$, 使 $(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a_k, b_k] = \emptyset, \forall k \geq n_x$. 于是得到 $[a_1, b_1]$ 的一个覆盖 $E = \{(x - \delta_x, x + \delta_x) \mid x \in [a_1, b_1], (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a_k, b_k] = \emptyset, k \geq n_x\}$. 然后利用有限覆盖定理导出结果是矛盾的.

【例 2-29】 (北京师范大学 2003 年) 设 $\alpha = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$, 证明存在 $a \leq x_n \leq b$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$ 成立.

【证明】 根据上确界的定义, 有 ① $\forall x \in [a, b], f(x) \leq \alpha$; ② $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in [a, b]$, 使 $f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon$.

取 $\varepsilon_1 = 1$, 则 $\exists x_1 \in [a, b]$, 使 $\alpha - 1 < f(x_1) \leq \alpha$;

取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, 则 $\exists x_2 \in [a, b]$, 使 $\alpha - \frac{1}{2} < f(x_2) \leq \alpha$;

如此继续下去, 便得到一数列 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 满足 $\forall n \in \mathbb{N}^+, x_n \in [a, b], \alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \alpha$. 这时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$.

【例 2-30】 (电子科技大学 2001 年) 用“ $\varepsilon - \delta$ ”定义证明 $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 但不一致连续.

【证明】 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|\sin x^2 - \sin x_0^2| = \left|2 \sin \frac{x^2 - x_0^2}{2} \cos \frac{x^2 + x_0^2}{2}\right| \leq |x + x_0| |x - x_0| \leq (2|x_0| + 1) |x - x_0| < \varepsilon$. 故 $f(x) = \sin x^2$ 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性知, $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall \delta > 0$, 取 $x_n^{(1)} = \sqrt{2n\pi}, x_n^{(2)} = \sqrt{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}$, 只要 n 充分大, 可有 $|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| < \delta$, 但 $|\sin(x_n^{(1)})^2 - \sin(x_n^{(2)})^2| = 1 > \varepsilon_0$. 故 $\sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不一致连续.

【例 2-31】 (电子科技大学 2002 年) 用“ $\varepsilon - \delta$ ”定义证明 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(c, 1) (c > 0)$ 一致连续, 但在 $(0, 1)$ 非一致连续.

【证明】 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = c^2 \varepsilon, \forall x_1, x_2 \in (c, 1)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$\left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| < \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 x_2} < \frac{|x_2 - x_1|}{c^2} < \varepsilon.$$

故 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(c, 1) (c > 0)$ 一致连续.

取 $x'_n = \frac{1}{2n\pi + (\pi/2)}$, $x''_n = \frac{1}{2n\pi}$ (n 为正整数), 则 $x'_n, x''_n \in (0, 1)$,

$|x'_n - x''_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{4n^2\pi^2 + n\pi^2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 但 $\left| \sin \frac{1}{x'_n} - \sin \frac{1}{x''_n} \right| = 1$. 故 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 非一致连续.

【例 2-32】(电子科技大学 2003 年) 叙述闭区间套定理和闭区间上连续函数的有界性定理, 并用闭区间套定理证明有界性定理.

【解】闭区间套定理 设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$,

则存在惟一的实数 r , 使得 r 属于每一个闭区间 $[a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$), 即 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

有界性定理 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 则它在 $[a, b]$ 有界.

用闭区间套定理证明有界性定理 用反证法. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界, 将 $[a, b]$ 二等分, 则 $f(x)$ 至少在其中一个区间无界, 把它记为 $[a_1, b_1]$; 再将 $[a_1, b_1]$ 二等分, $f(x)$ 至少在其中一个区间无界, 记为 $[a_2, b_2]$, \dots , 如此下去, 得到一个闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足 (1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$); (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$; (3) $f(x)$ 在任一闭区间 $[a_n, b_n]$ 无界. 由区间套定理, 存在惟一实数 r 属于所有闭区间 $[a_n, b_n]$. 因为 $f(x)$ 在 $r \in [a, b]$ 连续, 由局部有界性, $\exists \delta > 0, M > 0, \forall x \in (r - \delta, r + \delta) \cap [a, b], |f(x)| \leq M$. 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$, 对充分大的 n , $[a_n, b_n] \subset (r - \delta, r + \delta) \cap [a, b]$, 从而 $f(x)$ 在 $[a_n, b_n]$ (n 充分大) 有界. 矛盾.

注 闭区间上连续函数的性质在微积分的理论中起着基本的作用. 利用实数连续性的基本定理, 可以给出每个性质的多种证明. 读者可以尝试寻找尽可能多的证明, 作为对自己的一种训练. 作为例子, 下面给出闭区间上连续函数的有界性定理的其他几种证明.

(1) 用紧致性定理证明有界性定理 用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界, 则 $\forall G > 0, \exists x_G \in [a, b]$, 使 $|f(x_G)| > G$. 特别地, 取 $G = 1$, 则 $\exists x_1 \in [a, b], |f(x_1)| > 1$; 取 $G = 2$, 则 $\exists x_2 \in [a, b]$, 使 $|f(x_2)| > 2, \dots$; 如此继续下去, 便得到一数列 $\{x_n\} \subset [a, b], f(x_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$. 因 $\{x_n\}$ 是有界数列, 根据紧致性定理, $\{x_n\}$ 有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b] (k \rightarrow \infty)$. 又 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. 与 $f(x_{n_k}) \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$ 矛盾.

(2) 用有限覆盖定理证明有界性定理 因为 $\forall x_0 \in [a, b], \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (若 $x_0 = a$ 或 b , 考虑其右极限或左极限), 由函数极限的局部有界性定理知, $\exists \delta_0 > 0, M_0 > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta_0) \cap [a, b], |f(x)| \leq M_0$. 构造开区间族

$$E = \{(x - \delta_x, x + \delta_x) \mid x \in [a, b]\},$$

则 E 为 $[a, b]$ 的一个覆盖. 由有限覆盖定理知, 可以从 E 中选出有限个开区间覆盖 $[a, b]$, 记为

$$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2), \dots, (x_k - \delta_k, x_k + \delta_k).$$

又当 $x \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap [a, b]$ 时, $|f(x)| \leq M_i, i = 1, 2, \dots, k$. 取 $M = \max_{1 \leq i \leq k} |M_i|$, 则 $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$. 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界.

(3) 用确界原理证明有界性定理 提示: 构造集合

$$E = \{x \mid x \in [a, b]; \forall t \in [a, x], |f(t)| < K(x)\}$$

其中 $K(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 的上界, 然后证明 $\sup E = b \in E$, 即 E 有最大值 b .

【例 2-33】(上海交通大学 2002 年) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续.

【证明】 因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$, 故 $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x \geq X$ 时, 有 $|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. 又 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续, 对上述 $\epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时, 有 $|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\epsilon}{3}$. 于是 $\forall x_1, x_2 \in [X, +\infty)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时, 有

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - g(x_1)| + |g(x_1) - g(x_2)| + \\ &\quad |g(x_2) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 一致连续. 由于 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 连续, 根据康托定理, $f(x)$ 在 $[a, X]$ 一致连续, 由例 2-15 知, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续.

第三章 一元函数微分学

§1 导数与微分

一、基本要求

1. 理解导数(微商)和微分的概念, 会用定义求函数的导数.
2. 掌握基本初等函数的导数公式, 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则, 并会运用这些法则熟练地求初等函数的导数和高阶导数.
3. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数以及反函数的导数.

二、主要概念和结论

1. 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点附近有定义. 若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 并称极限值为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数或微商, 记为 $f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$, 或 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$.

若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 及 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在, 则分别称这两个极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数和右导数, 分别记为 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 每一点都可导, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 可导, 并称 $f'(x)$ 为函数 $y = f(x)$ 的导函数, 简称导数或微商.

若函数在开区间 (a, b) 可导, 且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在, 则称函数在闭区间 $[a, b]$ 可导.

2. $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 都存在, 且 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点必连续, 反之不然.

3. 导数的四则运算法则 若函数 u 和 v 在点 x 可导, 则有

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

4. 复合函数求导法则 若 $u = g(x)$ 在点 x 可导, $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x 点处可导, 且有

$$[f(g(x))]' = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x), \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

这个公式也称为链式法则, 它可以推广到多个函数复合的情形.

5. 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义. 若

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

其中 A 与 Δx 无关, 则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点可微, 并称 $A \cdot \Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的微分, 记为 dy 或 df .

6. 函数 $y = f(x)$ 在 x 点可微 \Leftrightarrow 函数 $y = f(x)$ 在 x 点可导. 这时有 $dy = f'(x) \cdot dx$. 这也是一元函数与多元函数的本质区别之一.

由上述关系式及求导法则可得相应的微分法则. 特别对应于复合函数的求导法则有 $df[g(x)] = f'(g(x))g'(x)dx$. 在此式中如以 $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ 代入, 即得 $df(u) = f'(u)du$. 由此可见, 无论 u 是自变量还是中间变量, 此式在形式上总是成立. 这个性质称为一阶微分形式不变性. 它使我们可在微分式中作任意变量代入, 有时比微商运算更重要. 高阶微分则不具有这个性质.

三、常用解题方法与典型例题

【例 3-1】求下列函数的导数:

$$(1) y = x \tan x - 7x + 6; \quad (2) y = \frac{x}{(1-x)(2-x)}.$$

【解】(1) $y' = \tan x + x \sec^2 x - 7$.

$$(2) y' = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{2-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{(2-x)^2}.$$

【例 3-2】求下列复合函数的导数:

$$(1) y = \ln \tan \frac{x}{2}; \quad (2) y = \ln \sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x+1}}.$$

【解】(1) $y' = \cot \frac{x}{2} \cdot \left(\tan \frac{x}{2} \right)' = \cot \frac{x}{2} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)'$

$$= \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{2} \cdot \sec^2 \frac{\pi}{2}.$$

$$(2) y = \frac{1}{2} [\ln|x+2| + \ln|x+3| - \ln|x+1|].$$

于是

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1} \right).$$

【例 3-3】 设 $f(x)$ 是对 x 可求导的函数, $y = f(e^x)e^{f(x)}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \frac{dy}{dx} &= e^{f(x)} \frac{d}{dx}(f(e^x)) + f(e^x) \frac{d}{dx}(e^{f(x)}) \\ &= e^{f(x)} f'(e^x) \frac{d}{dx}(e^x) + f(e^x) e^{f(x)} \frac{d}{dx}(f(x)) \\ &= e^{f(x)} f'(e^x) e^x + f(e^x) e^{f(x)} f'(x) \\ &= f'(e^x) e^{x+f(x)} + f(e^x) f'(x) e^{f(x)}. \end{aligned}$$

【例 3-4】 求下列函数的导数:

$$(1) y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0);$$

$$(2) y = x^{a^x} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{【解】 } (1) y' &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

$$(2) y' = a^x x^{a^x - 1} + a^{x^a} a x^{a-1} \ln a + a^{a^x} a^x (\ln a)^2.$$

【例 3-5】 已知函数 $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$, 求 $dy(0)$, $dy(a)$.

$$\text{【解】 } dy = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a^2 + x^2} dx, \text{ 于是}$$

$$dy(0) = \frac{1}{a^2 + 0^2} dx = \frac{1}{a^2} dx, \quad dy(a) = \frac{1}{a^2 + a^2} dx = \frac{1}{2a^2} dx.$$

【例 3-6】 求下列函数的微分:

$$(1) y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad (2) y = e^{\sin x^2}.$$

$$\text{【解】 } (1) dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) dx = \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{2x\sqrt{x}} dx.$$

$$(2) dy = e^{\sin x^2} d(\sin x^2) = \cos x^2 e^{\sin x^2} d(x^2) = 2x \cos x^2 e^{\sin x^2} dx.$$

【例 3-7】 设 u, v 是 x 的可微函数, 求 dy :

(1) $y = \arctan \frac{u}{v}$; (2) $y = \ln \sin(u + v)$.

【解】 (1) $dy = \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v^2}{u^2 + v^2} \cdot \frac{vdu - u dv}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{u^2 + v^2} dx$.

(2) $dy = \frac{1}{\sin(u + v)} d\sin(u + v) = \cot(u + v) d(u + v)$
 $= \cot(u + v)(u' + v') dx$.

【例 3-8】 求下列函数的微分 dy :

(1) $y = \sin^2 t, t = \ln(3x + 1)$;

(2) $y = e^{3u}, u = \frac{1}{2} \ln t, t = x^3 - 2x + 5$.

【解】 (1) $dy = 2 \sin t \cos t dt = \sin 2t d \ln(3x + 1) = \frac{3 \sin 2t}{3x + 1} dx$
 $= \frac{3 \sin[2 \ln(3x + 1)]}{3x + 1} dx$.

(2) $dy = 3e^{3u} du = 3e^{3u} d\left(\frac{1}{2} \ln t\right) = \frac{3e^{3u}}{2t} dt = \frac{3e^{3u}}{2t} d(x^3 - 2x + 5)$
 $= \frac{3e^{3u}(3x^2 - 2)}{2t} dx = \frac{3(3x^2 - 2)e^{\frac{3}{2} \ln(x^3 - 2x + 5)}}{2(x^3 - 2x + 5)} dx$.

注 当函数为一般的初等函数时, 可利用基本公式、四则运算的求导法则和微分法则、复合函数求导法则、微分形式不变性求出其导数或微分.

【例 3-9】 求下列函数的高阶导数:

(1) $y = x \ln x$, 求 y'' ; (2) $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(n)}$.

【解】 (1) $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$, 于是 $y'' = (y')' = \frac{1}{x}$.

(2) 由牛顿-莱布尼茨公式, 有

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} (e^{2x})^{(n-k)} \\ &= C_n^0 (x^2)^{(0)} (e^{2x})^{(n-0)} + C_n^1 (x^2)^{(1)} (e^{2x})^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)^{(2)} (e^{2x})^{(n-2)} \\ &= x^2 (e^{2x})^{(n)} + n \cdot 2x (e^{2x})^{(n-1)} + \frac{2n(n-1)}{2} (e^{2x})^{(n-2)} \\ &= 2^{n-2} e^{2x} [4x^2 + 4nx + n(n-1)]. \end{aligned}$$

【例 3-10】 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y = \frac{1}{x(1-2x)}$; (2) $y = \sin^2 x$; (3) $y = \frac{e^x}{x}$.

【解】 (1) $y = \frac{1}{x} - \frac{2}{2x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$, 故

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} - (-1)^n \frac{n!}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}.$$

(2) $y = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$, 故 $y^{(n)} = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

(3) $y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = e^x \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k k!}{x^{k+1}}.$

【例 3-11】 设 $f(x)$ 的各阶导数存在, 求 y' 和 y'' .

(1) $y = f(x^2)$; (2) $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$; (3) $y = f(e^{-x})$;

(4) $y = f(\ln x)$; (5) $y = f(f(x))$.

【解】 (1) $y' = 2xf'(x^2)$, $y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)$,
 $y''' = 12xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2).$

(2) $y' = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$, $y'' = \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$y''' = -\frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6} f''' \left(\frac{1}{x}\right).$$

(3) $y' = -e^{-x} f'(e^{-x})$, $y'' = e^{-x} f'(e^{-x}) + e^{-2x} f''(e^{-x})$,
 $y''' = -e^{-x} f'(e^{-x}) - 3e^{-2x} f''(e^{-x}) - e^{-3x} f'''(e^{-x}).$

(4) $y' = \frac{1}{x} f'(\ln x)$, $y'' = -\frac{1}{x^2} f'(\ln x) + \frac{1}{x^2} f''(\ln x)$,

$$y''' = \frac{2}{x^3} f'(\ln x) - \frac{3}{x^3} f''(\ln x) + \frac{1}{x^3} f'''(\ln x).$$

(5) $y' = f'(x) f'(f(x))$, $y'' = f''(x) f'(f(x)) + (f'(x))^2 f''(f(x))$,

$$y''' = f'''(x) f'(f(x)) + 3f''(x) f'(x) f''(f(x)) + (f'(x))^3 f'''(f(x)).$$

【例 3-12】 求函数 $y = f(u) = e^u$, $u = \varphi(x) = x^2$ 的二阶微分.

【解】 $dy = f'(u) du = e^u du = 2xe^{x^2} dx$,

$$d^2 y = 2(e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}) dx^2 + 2xe^{x^2} d^2 x.$$

【例 3-13】 设函数 $u(x) = \ln x$, $v(x) = e^x$, 求 $d^3(uv)$, $d^3\left(\frac{u}{v}\right)$.

【解】 $du = \frac{1}{x} dx$, $d^2 u = -\frac{1}{x^2} dx^2 + \frac{1}{x} d^2 x$,

$$d^3 u = \frac{2}{x^3} dx^3 - \frac{3}{x^2} d^2 x dx + \frac{1}{x} d^3 x,$$

$$dv = e^x dx, \quad d^2v = e^x dx^2 + e^x d^2x,$$

$$d^3v = e^x dx^3 + 3e^x d^2x dx + e^x d^3x,$$

$$d(uv) = u dv + v du, \quad d^2(uv) = 2du dv + u d^2v + v d^2u,$$

$$d^3(uv) = 3d^2u dv + 3du d^2v + u d^3v + v d^3u, \quad \text{故}$$

$$d^3(uv) = \frac{e^x}{x^3} [x^2(1+x\ln x)d^3x + 3x(-1+2x+x^2\ln x)dx d^2x + (2-3x+3x^2+x^3\ln x)dx^3];$$

$$d^3\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{e^x}{x^3} [x^2(1-x\ln x)d^3x + 3x(-1-2x+x^2\ln x)dx d^2x + (2+3x+3x^2-x^3\ln x)dx^3].$$

【例 3-14】 若 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 证明 $f^{(n)}(0) = 0$.

【证明】 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x e^{\frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{\text{令 } y = \frac{1}{x}} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0$. 设 $f^{(n-1)}(0) = 0$, 因为 $f^{(n-1)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} (x \neq 0)$, 其中 $P\left(\frac{1}{x}\right)$ 表示关于 $\frac{1}{x}$ 的某个多项式, 因此 $f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^p e^{-y^2}}{e^{y^2}} = 0$. 由归纳法得, $f^{(n)}(0) = 0$.

【例 3-15】 求函数 $f(x) = \begin{cases} x e^{-x^2}, & |x| \leq 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$ 的导数.

【解】 当 $|x| < 1$ 时, $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$, 当 $|x| > 1$ 时, $f'(x) = 0$.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-1} - e^{-1}}{x - 1} = 0,$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x e^{-x^2} - e^{-1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-x^2}(1-2x^2) = -e^{-1},$$

所以 $f'(1)$ 不存在. 因 $f(x)$ 在 $x = -1$ 不连续, 所以 $f'(-1)$ 也不存在. 于是

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2}(1-2x^2), & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

注 本题典型错误是没有考虑分界点的导数, 而直接得

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2}(1-2x^2), & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

【例 3-16】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ ax+b, & x < 3 \end{cases}$, 确定 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导.

分析 要使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导, 只需 $f(3) = f(3+0) = f(3-0)$ 和 $f'_-(3) = f'_+(3)$ 即可.

【解】 由 $f(3-0) = f(3) \Rightarrow 3a+b=9$, 又

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6,$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{ax + b - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{ax - 3a}{x - 3} = a.$$

所以 $a=6, b=-9$.

【例 3-17】 设 $f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} (m \in \mathbb{N}^+)$. 试问:

(1) m 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

(2) m 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导;

(3) m 为何值时, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【解】 (1) 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 只需 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} x^m \sin \frac{1}{x} = 0$; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{1}{x}$ 有界但无极限, 因此, 只需 $x^m \rightarrow 0$, 于是 $m > 0$.

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^{m-1} \sin \frac{1}{x}$; 所以, 要使 $f'(0)$ 存在, 当且仅当 $x^{m-1} \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$, 于是 $m > 1$, 这时 $f'(0) = 0$.

(3) 因为 $f'(x) = \begin{cases} x^{m-2} \left(m \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 所以要使 $f'(x)$

在 $x=0$ 处连续, 只需 $x^{m-2} \rightarrow 0$, 即 $m > 2$.

【例 3-18】 设 $g(0) = g'(0) = 0$, $f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(0)$.

【解】 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \sin \frac{1}{x}}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \cdot \sin \frac{1}{x} \right] = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = 0, \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \right).$$

注 一般分段函数在各段上是可导的, 可用求导法则直接求出, 分界点的导数必须用定义判定或求出, 特别当函数在分界点左、右两侧表达式不同时, 应利用定义判定在该点的左、右导数是否存在及相等.

【例 3-19】 求下列隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) x^3 + y^3 - xy = 0; \quad (2) \arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

【解】 (1) 方程两边关于 x 求导, 有 $3x^2 + 3y^2 \cdot y' - (y + x \cdot y') = 0$, 解得, $y' = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$.

(2) 方程两边关于 x 求导, 有 $\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y' \cdot x - y}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2y \cdot y'}{x^2 + y^2}$, 解得

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

【例 3-20】 求下列参数方程的导数:

$$(1) \begin{cases} x = e^{2t} \cos^2 t \\ y = e^{2t} \sin^2 t \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x = a \left(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t \right) \\ y = a \sin t \end{cases}.$$

【解】 (1) $x'(t) = 2e^{2t} \cos^2 t - e^{2t} 2 \cos t \sin t = 2e^{2t} \cos t (\cos t - \sin t)$,
 $y'(t) = 2e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} 2 \sin t \cos t = 2e^{2t} \sin t (\sin t + \cos t)$,

所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \tan t \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$.

$$(2) x'(t) = a \left(\cot \frac{t}{2} \sec^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} - \sin t \right) = a (\csc t - \sin t) = a \cos t \cot t,$$

$y'(t) = a \cos t$, 所以, $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \tan t$.

【例 3-21】 求由 $e^{x+y} - xy = 0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

【解】 方程两端对 x 求导, 得 $e^{x+y}(1+y') - y - xy' = 0$, 解出

$$y' = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x}.$$

将 $e^{x+y}(1+y') - y - xy' = 0$ 式两端再对 x 求导, 得

$$e^{x+y}(1+y')^2 + e^{x+y}y'' - y' - y' - xy'' = 0,$$

整理得 $y' = \frac{2y' - e^{x+y}(1+y')^2}{e^{x+y} - x}$, 把 y' 代入, 得

$$y' = \frac{2(e^{x+y} - x)(y - e^{x+y}) - e^{x+y}(y - x)^2}{(e^{x+y} - x)^3}.$$

注 求由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数的导数常用三种方法: (1) 把 y 看成 x 的函数, 在方程两边对 x 求导, 用复合函数求导法则, 得到含 y' 的等式, 从中解出 y' . (2) 方程两边求微分, 利用一阶微分形式不变性, 得到含 dx 和 dy 的等式, 再解出 $\frac{dy}{dx}$. (3) 利用公式 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$ (在第五章给出).

【例 3-22】 求下列参数方程的二阶导数:

$$(1) \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}.$$

【解】 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(1+t),$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2}(1+t) \right) \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2-2t} = \frac{3}{4(1-t)}.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{f''(t)}.$$

【例 3-23】 用对数求导法求下列函数的导数:

$$(1) y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad (2) y = (1+x)^{\frac{1}{x}} (x > 0).$$

【解】 (1) 两边取对数, 得 $\ln y = \ln x + \frac{1}{2}(\ln|1-x| - \ln|1+x|)$. 两边关于 x 求导, 得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{(1-x)(1+x)}.$$

故 $y' = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(1-x)(1+x)} \right].$

(2) 两边取对数, 得 $\ln y = \frac{1}{x} \ln(1+x)$. 两边对 x 求导, 得

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)}.$$

故 $y' = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)} \right).$

注 常用取对数求导法求幂指函数及连乘积函数的导数. 对 $y = f(x)$ 两

边取对数后, 两边对 x 求导, 把 y 看成复合函数的中间变量. 其优点是, 可以把积商化为和差, 幂指函数化为乘积函数, 从而简化运算.

【例 3-24】 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 二阶可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 若 $f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$, 求 $f^{-1}{}'(y)$.

$$\text{【解】} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{-y''}{(y')^3}.$$

注 此题给出了反函数的二阶导数公式. 反函数的导数等于原来函数的导数的倒数, 但反函数的二阶导数不一定等于原来函数的二阶导数的倒数.

【例 3-25】 设 $y=y(x)$ 存在反函数, 且满足方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 0$. 证明反函数 $x=x(y)$ 满足 $\frac{d^2x}{dy^2} = 1$, 并由此求出一个 $y=y(x)$.

【证明】 由例 3-24 知,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right) \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{-y''}{(y')^3} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx} \right)^3} = 1.$$

由 $\frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = 1$ 知, 可取 $\frac{dx}{dy} = y$, 从而 $x = \frac{1}{2}y^2$, 即 $y^2 = 2x$ 满足方程.

§ 2 微分中值定理及其应用

一、基本要求

1. 掌握费马定理, 罗尔定理, 拉格朗日中值定理, 柯西中值定理和泰勒公式, 会用它们证明有关命题, 掌握通过构造辅助函数解决问题的方法.
2. 掌握用洛必达法则求待定型极限的方法.
3. 会用导数(包括高阶导数)判断函数的单调性、极值、凸性.
4. 掌握函数最大值、最小值的求法及其应用.

二、主要概念和结论

1. 若存在 $\delta > 0$, 使函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内满足 $f(x_0) \geq f(x)$ (或 $f(x_0) \leq f(x)$), 则称函数 f 在点 x_0 取得极大(小)值, x_0 称为 f 的极大(小)值点. 极大值和极小值统称为极值.

2. 费马定理 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点达到极值, 且 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

注 定理给出了 $f(x)$ 取得极值的必要条件. 我们称满足 $f'(x) = 0$ 的点 x 为 $f(x)$ 的稳定点或驻点.

3. 罗尔定理 若函数 $f(x)$ 满足 (I) 在闭区间 $[a, b]$ 连续; (II) 在开区间 (a, b) 可导; (III) $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

4. 拉格朗日中值定理 若函数 $f(x)$ 满足 (I) 在闭区间 $[a, b]$ 连续; (II) 在开区间 (a, b) 可导, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

5. 柯西中值定理 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足 (I) 在闭区间 $[a, b]$ 连续; (II) 在开区间 (a, b) 可导; (III) $g'(x) \neq 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

6. 洛必达法则 若 (I) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 其中 $\delta > 0$; (II) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (或 ∞); (III) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (其中 A 可为实数, 也可以为 ∞), 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

注 上述表达式中分子分母同时趋于零 (或无穷), 称这种表达式极限为 $\frac{0}{0}$ (或 $\frac{\infty}{\infty}$) 型待定型. 除此之外, 还有 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 类型待定型, 这些待定型都可以经过适当变形或变换化为 $\frac{0}{0}$ (或 $\frac{\infty}{\infty}$) 型的待定型, 然后用洛必达法则来求其极限. 法则对极限过程 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 的情形, 只要稍加修改条件 (I), 有同样的结论.

7. 泰勒公式 若函数 $f(x)$ 在含 x_0 的某个区间有 $n+1$ 阶连续导数, 则对该区间内的任何 x , 有下面的泰勒公式成立:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中 $P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 的 n 次泰勒多项式, $R_n(x)$ 称为 n 次泰勒公式的余

项. 当 $x_0=0$ 时上述公式称为麦克劳林公式. 其中余项 $R_n(x)$ 有以下几种形式:

皮亚诺型余项 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$;

拉格朗日型余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$, ξ 介于 x 与 x_0 之间;

柯西型余项 $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$;

积分余项 $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$.

常见的基本初等函数的麦克劳林展开式:

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$(2) \sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1};$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-2)!} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n)!} x^{2n};$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)} x^{n+1};$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

8. 函数的单调性 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调上升(或单调下降)的充要条件是 $f'(x) \geq 0$ (或 $f'(x) \leq 0$), $\forall x \in (a, b)$.

注 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$), 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内严格单调上升(或严格单调下降). 但反之不一定, 如 $f(x) = x^3$ 在任何包含 0 的区间严格单调上升, 但 $f'(0) = 0$.

9. 函数的极值 极值的第一充分条件 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 连续, 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ 可导, 其中 $\delta > 0$.

(1) 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) \leq 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 取得极小值;

(2) 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) \geq 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 取得极大值.

极值的第二充分条件 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则

(1) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 取得极小值;

(2) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 取得极大值.

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 必能取到最值, 且最值只能在区间 $[a, b]$ 的端点、驻点或不可导点取得, 逐一比较, 便可获得最大值和最小值.

10. 函数的凸性 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 有定义, $\forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in I$, 若 $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 为下凸函数; 若 $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 为上凸函数.

设 $f(x)$ 在 (a, b) 二阶可导, 若 $\forall x \in [a, b]$, 都有 $f''(x) \geq 0 (\leq 0)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 为下(上)凸函数.

11. 拐点 若函数 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的两侧附近分别是上凸和下凸的, 则称 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

设函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 可导, 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 二阶可导. 若 $f''(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 的符号相反, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点.

三、常用解题方法与典型例题

【例 3-26】 设函数 $f(x)$ 在 a 点具有连续的二阶导数. 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

【证明】 方法一 因为 $f(x)$ 在 a 点有连续二阶导数, 故 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(a - \delta, a + \delta)$ 有连续的一阶导数. 任取 $h \in (0, \delta)$, 令 $F(x) = f(a+x) + f(a-x) - 2f(a)$, $G(x) = x^2$, $x \in [0, h]$, 则 F 和 G 在 $[0, h]$ 满足柯西中值定理条件, 故 $\exists \xi \in (0, h)$, 使得

$$\begin{aligned} \frac{F(b) - F(0)}{G(b) - G(0)} &= \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \\ &= \frac{f'(a+\xi) - f'(a-\xi)}{2\xi}. \end{aligned}$$

又当 $h \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow 0$, 且 $f(x)$ 在 a 点二阶可导, 所以,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+\xi) - f(a-\xi)}{2\xi} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+\xi) - f(a)}{\xi} + \frac{f(a-\xi) - f(a)}{-\xi} \right] \\
&= \frac{1}{2} [f'(a) + f'(a)] = f'(a).
\end{aligned}$$

注 若只给出条件函数 $f(x)$ 在 a 点具有二阶导数, 仍有同样结论成立.

方法二 由洛必达法则

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(a+h) + f''(a-h)}{2} = f''(a).
\end{aligned}$$

方法三 因 $f(x)$ 在 a 点有连续二阶导数, 所以 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 有二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f''(x) = f''(a)$. 任取 $h \in (0, \delta)$, 对 $f(x)$ 分别在 $[a-h, a]$ 和 $[a, a+h]$ 应用拉格朗日中值定理得, $\exists \xi_1 \in (a-h, a)$, $\xi_2 \in (a, a+h)$, 使得 $f(a) - f(a-h) = hf'(\xi_1)$, $f(a+h) - f(a) = hf'(\xi_2)$. 所以 $f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = h[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 应用拉格朗日中值定理得, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得

$$f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = h^2 f''(\xi).$$

令 $h \rightarrow 0$, 则 ξ_1, ξ_2 都趋于 a , 从而 $\xi \rightarrow a$, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \lim_{\xi \rightarrow a} f''(\xi) = f''(a).$$

【例 3-27】 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a$, 求证 $\forall T > 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+T) - f(x)] = Ta$.

【证明】 对 $f(x)$ 在 $[x, x+T]$ 应用拉格朗日中值定理得, $\exists \xi \in (x, x+T)$, 使得 $f(x+T) - f(x) = Tf'(\xi)$. 令 $x \rightarrow +\infty$, 则 $\xi \rightarrow +\infty$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+T) - f(x)] = T \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi) = Ta.$$

【例 3-28】 证明(1) 方程 $x^3 - 3x + c = 0$ (c 是常数) 在区间 $[0, 1]$ 内不可能有两个不同的实根; (2) 方程 $x^n + px + q = 0$ (n 为正整数, p, q 为实数) 当 n 为偶数时至多有两个实根; 当 n 为奇数时至多有三个实根.

【证明】 (1) 用反证法. 若方程在 $[0, 1]$ 有两个不同的实根 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. 令 $f(x) = x^3 - 3x + c$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 满足罗尔定理条件. 于是 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $f'(\xi) = 3\xi^2 - 3 = 0 \Rightarrow \xi = 1$. 这与 $0 \leq x_1 < \xi < x_2 \leq 1$ 矛盾.

(2) 当 n 为偶数时, 设方程有三个不同的实根 x_1, x_2, x_3 , 不妨设 $x_1 < x_2 < x_3$. 令 $f(x) = x^n + px + q$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_2, x_3]$ 满足罗尔定理条件, 从而 $\exists \xi_1 \in (x_1, x_2), \exists \xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使得 $f'(\xi_1) = n\xi_1^{n-1} + p = 0$, $f'(\xi_2) = n\xi_2^{n-1} + p = 0$. 于是

$$f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = n(\xi_1^{n-1} - \xi_2^{n-1}) = 0 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2,$$

这与 $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$ 矛盾. 故当 n 为偶数时, 原方程至多有两个实根. 同理可证, 当 n 为奇数时, 原方程至多有三个实根.

【例 3-29】 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 求证 $\exists \xi \in (a, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

【证明】 若 $f(x) \equiv A, \forall x \in (a, +\infty)$, 则任取 $\xi \in (a, +\infty)$ 即可.

若 $f(x) \not\equiv A, \exists x_0 \in (a, +\infty)$, 使得 $f(x_0) \neq A$. 不妨设 $f(x_0) > A$ (对 $f(x_0) < A$ 类似可证). 任取一数 B 满足 $A < B < f(x_0)$. 由于 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A < B$, 则对 $\varepsilon_0 = B - A > 0, \exists \delta_0 > 0$, 当 $a < x < a + \delta_0$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon_0 = B - A$, 即 $2A - B < f(x) < B < f(x_0)$. 又 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 连续, 根据介值定理, $\exists x_1 \in (a, x_0)$, 使 $f(x_1) = B$; 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A < B$, 则 $\exists X > x_0 > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $f(x) < B < f(x_0)$, 由介值定理, $\exists x_2 \in (x_0, X)$, 使 $f(x_2) = B$. 从而 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 满足罗尔定理条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

【例 3-30】 设 $f(x)$ 可导, 求证 $f(x)$ 的两零点之间有 $f(x) + f'(x)$ 的零点.

【证明】 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 即 $f(x_1) = f(x_2) = 0$. 作辅助函数 $F(x) = f(x)e^x$, 由于 $f(x)$ 可导, 所以 $F(x)$ 可导, 于是 $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 满足罗尔定理条件, 从而 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi)e^\xi + f(\xi)e^\xi = e^\xi[f'(\xi) + f(\xi)] = 0$, 所以 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

注 构造辅助函数是本题证明的关键, 请读者注意理解各种类型辅助函数的构造.

【例 3-31】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 其中 $a \geq 0$, 求证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$.

【证明】 设 $g(x) = x^2$, 则 f 和 g 在 $[a, b]$ 可导, 且当 $x \in (a, b)$ 时, $g'(x) \neq 0$. 由柯西中值定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, 即 $\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$, 于是

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

【例 3.32】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $0 < a < b$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

【证明】 方法一 令 $k = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$, 则 $\frac{f(b) - k}{b} = \frac{f(a) - k}{a}$. 作辅助函数 $F(x) = \frac{f(x) - k}{x}$ (称为 k 值法), 易知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $F(a) = F(b)$. 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. 又 $F'(x) = \frac{xf'(x) - [f(x) - k]}{x^2}$, $x \in (a, b)$, 所以 $\xi f'(\xi) - [f(\xi) - k] = 0$, 即

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

方法二 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, $G(x) = \frac{1}{x}$, 则 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $G'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$. 由柯西中值定理知, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = \frac{\frac{f(b) - f(a)}{b} - \frac{f(a) - f(b)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}},$$

即

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

方法三 令 $F(x) = xf\left(\frac{ab}{x}\right)$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导. 由拉格朗日中值定理, $\exists \eta \in (a, b)$, 使得

$$F'(\eta) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

又

$$F'(x) = f\left(\frac{ab}{x}\right) - \frac{ab}{x} f'\left(\frac{ab}{x}\right),$$

令 $\xi = \frac{ab}{\eta}$, 则 $\xi \in (a, b)$, 且

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

【例 3.33】 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 且 $f'(a) \neq f'(b)$, k 为介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任一实数, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = k$.

【证明】 不妨设 $f'(a) < k < f'(b)$. 令 $F(x) = f(x) - kx$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $F'(x) = f'(x) - k$. 由闭区间上连续函数的性质, $F(x)$ 在

$[a, b]$ 有最小值, 设最小值点为 ξ . 因 $F'(a) = f'(a) - k < 0$, 故存在 $x_1 \in [a, b]$, 使得 $\frac{F(x_1) - F(a)}{x_1 - a} < 0$. 从而 $F(a) > F(x_1) \geq F(\xi)$, 所以 $\xi \neq a$. 同理可证 $\xi \neq b$, 即 $\xi \in (a, b)$. 故 ξ 为 $F(x)$ 的极小值点, 由费马定理, $F'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = k$.

注 (1) 此结论称为达布定理. 它说明 $f'(x)$ 具有介值性. 由此可得, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 则 $f'(x)$ 不能有第一类间断点, 即具有第一类间断点的函数不存在原函数.

(2) 下面结论是本例的特殊情形: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 且 $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$. 它对应于根的存在定理.

【例 3-34】 用拉格朗日中值定理证明不等式 $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, $x > 0$.

【证明】 函数 $f(t) = \arctan t$ 在 $[0, x]$ 满足拉格朗日定理条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0},$$

即
$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\arctan x}{x}.$$

由于 $0 < \xi < x$, 故

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < 1,$$

从而有
$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan x}{x} < 1,$$

即
$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

【例 3-35】 用函数的单调性证明不等式 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$.

【证明】 令 $f(x) = x - \ln(1+x)$, $x \geq 0$, 则当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$. 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) < x$.

令 $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$, 则当 $x > 0$ 时, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 即 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$.

【例 3-36】 应用函数的凹凸性证明不等式: $\forall a, b \in (-\infty, +\infty)$, 有 $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b)$.

【证明】 令 $f(x) = e^x$, 因为 $f''(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 下凸, 从

而 $\forall a, b \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$, 即 $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b)$.

【例 3-37】 (1) 求函数 $f(x) = ax - \ln x$ 在 $x > 0$ 的极值; (2) 求方程 $ax = \ln x$ 有两个实根的条件.

【解】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = a - \frac{1}{x} < 0$, 此时 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时单调下降, 无极值; 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$, 又 $f''\left(\frac{1}{a}\right) = a^2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 时取到极小值 $f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a$.

(2) 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) = a - \frac{1}{x} < 0$, 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 故当 $f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a < 0$, 即 $0 < a < e^{-1}$ 时, 原方程有两个实根.

【例 3-38】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 取到它的最小值.

【证明】 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 故 $\forall G > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $f(x) > G$. 若取 $G = |f(0)| + 1 > 0$, 则 $\exists X_0 > 0$, 当 $|x| > X_0$ 时, 有 $f(x) > G = |f(0)| + 1 > f(0)$. 则若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有最小值, 应在 $[-X_0 - 1, X_0 + 1]$ 中取到. 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 从而 $f(x)$ 在闭区间 $[-X_0 - 1, X_0 + 1]$ 连续, 由最值定理知, $f(x)$ 在 $[-X_0 - 1, X_0 + 1]$ 可以取到最小值. 所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 取到它的最小值.

【例 3-39】 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$.

(1) 若存在 $x_1 \in [a, b)$, 使 $f(x_1) > B$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 达到最大值;
(2) 若存在 $x_1 \in [a, b)$, 使 $f(x_1) = B$, 能否断言 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 达到最大值?

【证明】 (1) 方法一 由 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$, $f(x_1) > B$, 故对 $\epsilon_0 = f(x_1) - B > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, 且 $\delta_0 < b - a$, 使当 $x \in (b - \delta_0, b)$ 时, 有 $f(x) - B < \epsilon_0 = f(x_1) - B \Rightarrow f(x) < f(x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 连续, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b - \delta_0]$ 连续, 由最值定理知, $f(x)$ 在 $[a, b - \delta_0]$ 达到最大值, 从而 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 达到最大值.

方法二 令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x < b \\ B, & x = b \end{cases}$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 于是

$F(x)$ 在 $[a, b]$ 达到最大值. 又存在 $x_1 \in [a, b)$, 使 $F(x_1) > F(b)$. 从而 $F(x)$ 在 $[a, b)$ 达到最大值, 即 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 达到最大值.

(2) 令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x < b \\ B, & x = b \end{cases}$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 于是 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 达到最大值. 若最大值为 B , 则 $F(x)$ 在 x_1 处达到 $F(x)$ 在 $[a, b)$ 的最大值, 即 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 可达到最大值; 若最大值大于 B , 则 $F(x)$ 在 $[a, b)$ 内可以达到最大值, 即 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 也可达到最大值.

【例 3-40】 给定长为 l 的线段, 试把它分成两段, 使以这两段为边所围成的矩形面积为最大.

【解】 设其中一段长为 x , 则另一段长为 $l-x$, 于是矩形的面积为

$$A(x) = x(l-x).$$

令 $A'(x) = l - x - x = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$, 由实际问题知, 当分成的两段都为 $\frac{l}{2}$ 时, 所围成的矩形面积最大.

【例 3-41】 设炮口的仰角为 α , 炮弹的初速为 v_0 (m/s), 炮口取作原点, 发炮时取作 $t=0$, 不计空气阻力时, 炮弹的运动方程为:

$$\begin{cases} x = tv_0 \cos \alpha \\ y = tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

若初速 v_0 不变, 问如何调整炮口的仰角 α , 使炮弹射程最远.

【解】 要求射程最远, 即求 x 的最大值, 且此时 $y=0$, 即

$$y = tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

于是 $x(\alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 令 $x'(\alpha) = \frac{2v_0^2 \cos 2\alpha}{g} = 0 \Rightarrow$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$, 由实际问题知, 当仰角 α 为 $\frac{\pi}{4}$ 时, 炮弹射程最远.

【例 3-42】 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界, $f'(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b$. 求证 $b=0$.

【证明】 方法一 不妨设 $a > 0$. 任取 $x \in [a, +\infty)$, $f(x)$ 在 $[x, 2x]$ 满足拉格朗日中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x, 2x)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$. 注意到 $f(2x) - f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b$. 令 $x \rightarrow +\infty$, 这时有 $\xi \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$. 从而 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f'(\xi) = 0$. 由极限的惟一性知, $b=0$.

方法二 用反证法. 若 $b \neq 0$, 不妨设 $b > 0$ ($b < 0$ 情形类似可证). 由于

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > 0$, 则对 $\varepsilon_0 = \frac{b}{2} > 0$, $\exists X_0 > \max\{0, a\}$, 当 $x > X_0$ 时, 有 $|f'(x) - b| < \varepsilon_0 = \frac{b}{2}$, 即 $0 < \frac{b}{2} < f'(x) < \frac{3b}{2}$. 从而 $f(x)$ 在 $(X_0, +\infty)$ 严格单调上升. 且对 $x_1 = X_0 + 1$, $x_2 > x_1$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > \frac{b}{2} \quad (\xi \in [x_1, x_2]),$$

即 $f(x_2) - f(x_1) > \frac{b}{2}(x_2 - x_1) \Rightarrow f(x_2) > f(X_0 + 1) + \frac{b}{2}(x_2 - X_0 - 1)$,

令 $x_2 \rightarrow +\infty$, 则 $\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} f(x_2) = +\infty$. 于是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界, 矛盾.

注 类似可证, (1) 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 都存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. (2) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > 0$. 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$.

【例 3-43】 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = A$, 证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在;

(2) 若补充定义 $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, 则 $f'_+(a)$ 存在且等于 A .

【证明】 (1) 由 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = A$ 知, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta_1$ 时, $|f'(x) - A| < 1$, 由此 $|f'(x)| < |A| + 1$. 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{|A| + 1}\right\}$, 则当 $x', x'' \in (a, a + \delta)$ 时, 由拉格朗日中值定理, $|f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)| |x'' - x'| < (|A| + 1)\delta \leq \varepsilon$, 其中 ξ 介于 x'' 与 x' 之间. 由柯西收敛原理知, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在.

(2) 补充定义 $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. 任取 $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 满足拉格朗日中值定理的条件, 故存在 $\xi \in (a, x)$, 使得 $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$. 因 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = A$ 及当 $x \rightarrow a^+$ 时, $\xi \rightarrow a^+$, 所以 $f'_+(a) =$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi \rightarrow a^+} f'(\xi) = A, \text{ 即 } f'_+(a) \text{ 存在且等于 } A.$$

注 (1) 对左导数的情形有类似的结论.

(2) 由此可得导数极限定理 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近连续, 除 x_0 点外可导, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f'(x_0)$ 也存在, 且 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

(3) 由此可知, 对导函数 $f'(x)$ 而言, x 或者是连续点, 或者是第二类间

断点, 不可能是第一类间断点.

【例 3-44】 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x)$ 单调, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 连续.

【证明】 反证法. 假设 $x_0 \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的一个间断点, 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 单调, x_0 必为 $f(x)$ 的第一类间断点. 由例 3-43 注(3)得出矛盾.

【例 3-45】 求下列待定型的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\cos x - 1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right); \quad (3) \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

【解】 (1) $\left(\frac{0}{0} \right)$ 型 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\sin x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$

(2) $(\infty - \infty)$ 型 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}.$

(3) $(0 \cdot \infty)$ 型 原式 $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\cot \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-1}{-\csc^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi} 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2.$

(4) (1^∞) 型 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1-x} \ln x} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} \right\} = e^{-1}.$

(5) $\left(\frac{0}{0} \right)$ 型 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)}$
 $= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x}}{2x(1+x) + x^2}$
 $= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{3x^2 + 2x} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{6x + 2} = -\frac{e}{2}.$

【例 3-46】 写出下列函数在 $x=0$ 的带皮亚诺型余项的泰勒展开式:

(1) $\sin^3 x$; (2) $\frac{x}{2x^2 + x - 1}$; (3) $\ln \frac{1+x}{1-2x}.$

【解】 (1) $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$
 $= \frac{3}{4} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \right] -$

$$\frac{1}{4} \left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (3-3^{2k-1})}{4(2k-1)!} x^{2k-1} + o(x^{2n-1}).$$

$$(2) \quad \frac{x}{2x^2+x-1} = \frac{x}{(2x-1)(x+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-2x} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{1-2x} \right]$$

$$= \frac{1}{3} [1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)] - \frac{1}{3} [1 + 2x + (2x)^2 + \cdots + (2x)^n + o(x^n)]$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [(-1)^k - 2^k] x^k + o(x^n).$$

$$(3) \quad \ln \frac{1+x}{1-2x} = \ln(1+x) - \ln(1-2x)$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n) \right] -$$

$$\left[(-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-2x)^n + o(x^n) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1} + 2^k] x^k + o(x^n).$$

【例 3-47】 求下列函数在 $x=1$ 的泰勒展开式:

(1) $\ln x$; (2) a^x .

【解】 (1) $\ln x = \ln[1+(x-1)]$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots +$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + o[(x-1)^n].$$

$$(2) \quad a^x = a \cdot a^{x-1} = a \cdot e^{(x-1)\ln a}$$

$$= a + a \ln a \cdot (x-1) + \frac{a \ln^2 a}{2!} (x-1)^2 + \cdots +$$

$$\frac{a \ln^n a}{n!} (x-1)^n + o[(x-1)^n].$$

【例 3-48】 利用泰勒公式求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x} \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x} - \sqrt{x^2 - 2x}).$$

【解】 (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^2} = 0.$

$$(2) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^3 + \frac{1}{2!}(x^3)^2 + o(x^6) - 1 - x^3}{(2x)^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^6 + o(x^6)}{(2x)^6} \\ = \frac{1}{128}.$$

$$(3) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \ln(1+x) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x) \right] = 1.$$

$$(4) \text{原式} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{y^3} + \frac{3}{y}} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}} \right] \\ = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \left[(1 + 3y^2)^{\frac{1}{3}} - (1 - 2y)^{\frac{1}{2}} \right] \\ = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \left\{ \left[1 + \frac{1}{3}(3y^2) \right] - \left[1 + \frac{1}{2}(-2y) + \frac{\frac{1}{2}(-2)}{2!}(-2y)^2 \right] + o(y^2) \right\} \\ = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y + y^2 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)}{y} = 1.$$

或 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\{ \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] - \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 1.$

【例 3-49】 设 $f(x)$ 在原点附近二次可微, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = 0.$

(1) 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$; (2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{x^2} + \frac{f(x)}{x^2} \right].$

【解】 (1) 由于 $\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x^3} \left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3) \right] + \frac{1}{x^2}.$

$$\left[f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) \right] = \frac{3}{x^2} + \frac{f(0)}{x^2} - \frac{9}{2} + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'(0)}{x} +$$

$o(1)$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = 0$ 知, $f(0) = -3$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 9$.

(2) 由 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$ 及 (1) 的结果得,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{x^2} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

【例 3-50】 设 $f(x)$ 在实轴上任意次可导, 令 $F(x) = f(x^2)$, 求证:

$$F^{(2n+1)}(0) = 0, \quad \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

【证明】 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots. \text{ 从而}$$

$$f(x^2) = f(0) + f'(0)x^2 + \frac{f''(0)}{2!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2n} + \cdots,$$

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + \frac{F^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots.$$

由 $F(x) = f(x^2)$, $F(0) = f(0)$, 比较上面两式得, $F^{(2n+1)}(0) = 0$, $\frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

【例 3-51】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有二阶导数, $f'(a) = f'(b) = 0$, 证明存在 $c \in (a, b)$, 使 $|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$.

【证明】 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有二阶导数, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 两点的泰勒展开式分别为

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 = f(a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2,$$

其中 $\xi \in (a, x)$;

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\eta)}{2!}(x-b)^2 = f(b) + \frac{f''(\eta)}{2!}(x-b)^2,$$

其中 $\eta \in (x, b)$.

所以 $|f(b) - f(a)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 - \frac{f''(\eta)}{2!}(x-b)^2 \right|$, 令 $x = \frac{a+b}{2}$, 则

$$|f(b) - f(a)| = \frac{1}{8}(b-a)^2 |f''(\xi) - f''(\eta)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{8}(b-a)^2(|f''(\xi)| + |f''(\eta)|) \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{8} \cdot 2\max\{|f''(\xi)|, |f''(\eta)|\} \\
&= \frac{(b-a)^2}{4} |f''(c)|.
\end{aligned}$$

其中 $c = \xi$ 或 η , 使得 $|f''(c)| = \max\{|f''(\xi)|, |f''(\eta)|\}$. 所以

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

注 类似可证, 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有二阶导数, $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 证明存在 $c \in (a, b)$, 使 $|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$. 可以进一步说明不等式右端的常数 4 是最佳估计 (即如果将此常数改为大于 4 的数, 则有函数使不等式不再成立).

【例 3-52】 对函数 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 应用拉格朗日中值定理有

$$f(x) - f(0) = f'(\theta x)x, \quad \theta \in (0, 1).$$

试证对下列函数有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta = \frac{1}{2}$:

$$(1) f(x) = \ln(1+x); \quad (2) f(x) = e^x.$$

【证明】 (1) 由 $\ln(1+x) - 0 = \frac{1}{1+\theta x} \cdot x$, 可得 $\theta = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

(2) 由 $e^x - 1 = e^{\theta x} \cdot x$, 可得 $\theta = \frac{\ln(e^x - 1) - \ln x}{x}$. 于是

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1) - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x(1+x)}{e^x(1+1+x)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

【例 3-53】 设 $f(x)$ 在 a 点附近二阶可导, 且 $f'(a) \neq 0$, 由微分中值定理 $f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h$, $0 < \theta < 1$. 求证 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$.

【证明】 由泰勒公式 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2)$, 与题设式子相减得

$$f'(a+\theta h) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2}h + o(h).$$

故

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta \frac{f'(a+\theta h) - f'(a)}{\theta h} = \frac{f''(a)}{2}.$$

由于 $f''(a) \neq 0$, 故 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$.

注 (1) 例 3-52 为本例结果对具体函数的具体应用.

(2) 进一步有结论: 设 $f(x)$ 在 a 点附近 n 阶可导, 且 $f^{(n-1)}(a) \neq 0$, 由泰勒公式

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)h^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)h^n}{n!},$$

$$0 < \theta < 1.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

【例 3-54】 证明若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 恒有 $f''(x) \geq 0$, 则在 $[a, b]$ 内任意两点 x_1, x_2 , 都有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

【证明】 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$. 将 $f(x)$ 在点 $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ 处展为泰勒公式, 并分别取 $x = x_1, x_2$ 有

$$f(x_1) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2,$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{2!}\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2.$$

其中 ξ 在 x_1 与 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 之间, η 在 x_2 与 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 之间, 于是

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{(x_2 - x_1)^2}{8}[f''(\xi) + f''(\eta)] \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

即
$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

注 本例利用泰勒公式证明了函数凸性的充分条件. 证明的关键是展开点的选取. 泰勒公式是在已知高阶可导的条件下证明不等式的常用方法.

§ 3 综合例题

【例 3-55】 (浙江大学 2001 年) 设 $y = y(x)$ 为可微函数, 求 $y'(0)$, 其中

$$y = -ye^x + 2e^y \sin x - 7x.$$

【解】 将 $x=0$ 代入 $y = -ye^x + 2e^y \sin x - 7x$ 中, 得 $y(0)=0$. 原式两边对 x 求导, $y' = -y'e^x - ye^x + 2e^y y' \sin x + 2e^y \cos x - 7$. 再将 $x=0$ 和 $y(0)=0$ 代入得 $y'(0) = -y'(0) + 2 - 7$. 即 $y'(0) = -\frac{5}{2}$.

【例 3-56】 (复旦大学 1999 年) 设 $y = x^{\sin(\sin x^x)}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

【解】 两边取对数, 得 $\ln y = \sin(\sin x^x) \ln x$. 两边对 x 求导, 得

$$\frac{1}{y} y' = \cos(\sin x^x) \cdot \cos x^x [x^x (1 + \ln x)] \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin(\sin x^x),$$

$$\text{即 } \frac{dy}{dx} = \sin(\sin x^x) \left\{ \cos(\sin x^x) \cdot \cos x^x [x^x (\ln x + \ln^2 x)] + \frac{1}{x} \sin(\sin x^x) \right\}.$$

【例 3-57】 (复旦大学 1998 年) 已知 $y = \tan \cos x^x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

【解】 $\frac{dy}{dx} = \sec^2(\cos x^x) \cdot (-\sin x^x) \cdot x^x (1 + \ln x) = -\sin x^x \cdot \sec^2(\cos x^x) \cdot x^x (1 + \ln x)$.

【例 3-58】 (复旦大学 1998 年) 已知 $f(x) = (x-a)^2 \varphi(x)$, 其中 $\varphi'(x)$ 在点 $x=a$ 的某邻域内连续, 求 $f''(a)$.

【解】 由 $f'(x) = 2(x-a)\varphi(x) + (x-a)^2 \varphi'(x)$ 知, $f'(a) = 0$. 所以

$$\begin{aligned} f''(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a)\varphi(x) + (x-a)^2 \varphi'(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [2\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)] = 2\varphi(a). \end{aligned}$$

【例 3-59】 (复旦大学 1997 年) 设 $y(x) = \begin{cases} 3x - \frac{1}{2}x^2 - 2, & 0 \leq x \leq 4 \\ 6 - x, & x > 4 \end{cases}$,

问 $y(x)$ 在 $x=4$ 处导数存在吗? 并求 $y(x)$ 的最大值.

$$\text{【解】 } y(4) = 2, y'_+(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{y(x) - y(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(6-x) - 2}{x - 4} = -1,$$

$$y'_-(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{y(x) - y(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\left(3x - \frac{1}{2}x^2 - 2\right) - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} (3 - x) = -1,$$

所以 $y'(4)$ 存在, 且 $y'(4) = -1$. 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, $y(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2 - 2 = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{5}{2}$, 故 $\max_{0 \leq x \leq 4} y(x) = \frac{5}{2}$; 当 $x > 4$ 时, $y(x) = 6 - x$, 故 $\sup_{x > 4} y(x) = 2$. 从而 $\max_{x \geq 0} y(x) = \frac{5}{2}$.

【例 3-60】 (北京师范大学 1998 年) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有二阶连续导数, 且

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty), \quad \forall h > 0.$$

证明 $\forall x \in (-\infty, +\infty), f'(x) \geq 0$.

【证明】 由泰勒公式, $\forall x \in (-\infty, +\infty), \forall h > 0$,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(h^2),$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(h^2).$$

两式相加得 $f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + o(h^2)$.

因为 $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0$, 所以 $f''(x)h^2 + o(h^2) \geq 0$, 令 $h \rightarrow 0$ 得, $f''(x) \geq 0$.

注 此例同样巧妙地利用了泰勒公式. 结合例 3-54 得到了函数凸性的充分必要条件.

【例 3-61】 (北京大学 2000 年) 求 e^{2x-x^2} 到含 x^5 项的泰勒展开式.

【证明】 由 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$,

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x - x^2) + \frac{1}{2!}(2x - x^2)^2 + \frac{1}{3!}(2x - x^2)^3 +$$

$$\frac{1}{4!}(2x - x^2)^4 + \frac{1}{5!}(2x - x^2)^5 + o(x^5)$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

第四章 一元函数积分学

§1 不定积分

一、基本要求

1. 理解原函数与不定积分的概念.
2. 掌握不定积分的基本公式和性质.
3. 掌握不定积分的换元积分法和分部积分法.
4. 会求有理函数、三角函数有理式和某些无理函数的积分.

二、主要概念和结论

1. 设在区间 I 的每一点, 都有 $F'(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 的一个原函数. $f(x)$ 在区间 I 的原函数全体 $F(x) + C$ 称为 $f(x)$ 在区间 I 的不定积分, 记为 $\int f(x)dx$.

2. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 有原函数, 则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}).$$

3. 第一换元积分法(凑微分法) 设函数 $f(u)$ 在区间 J 有原函数 $F(u)$, $u = \varphi(x)$ 在 I 可导, 且 $\varphi(I) \subset J$, 则

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= \int f(u)du \Big|_{u=\varphi(x)} = F(u) \Big|_{u=\varphi(x)} + C \\ &= F(\varphi(x)) + C. \end{aligned}$$

4. 第二换元积分法 设 $u = \varphi(x)$ 在区间 I 连续可导, 且 $\varphi'(x) \neq 0$, $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$ 在区间 I 有原函数 $F(x)$, 则

$$\begin{aligned} \int g(u)du &= \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) \Big|_{x=\varphi^{-1}(u)} + C \\ &= F(\varphi^{-1}(u)) + C. \end{aligned}$$

5. 分部积分法 设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 可导, $\int u'(x)v(x)dx$ 存在, 则

$\int u(x)v'(x)dx$ 存在, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx,$$

或
$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

三、常用解题方法与典型例题

【例 4-1】 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$; (2) $\int \frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$; (3) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$.

【解】 (1) 原式 $= \int \frac{1+x^2-x^2}{x^4(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^4} dx - \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$
 $= -\frac{1}{3x^3} - \left(\int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right)$
 $= \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \arctan x + C.$

(2) 原式 $= \int (2\sec^2 x + \tan^2 x) dx = \int (3\sec^2 x - 1) dx = 3\tan x - x + C.$

(3) 原式 $= \int \frac{dx}{1+2\cos^2 x - 1} = \int \frac{\sec^2 x}{2} dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$

【例 4-2】 求一曲线 $y = f(x)$, 它在点 $(x, f(x))$ 处的切线的斜率为 $2x$, 且通过点 $(2, 5)$.

【解】 由已知, $f'(x) = 2x$, 故 $f(x) = \int 2x dx = x^2 + C$, 再由 $f(x)$ 过点 $(2, 5)$, 知 $f(2) = 2^2 + C = 5 \Rightarrow C = 1$.

【例 4-3】 已知 $f(x)$ 满足给定的关系式, 试求 $f(x)$.

(1) $xf'(x) = 1 \quad (x > 0)$; (2) $f(x)f'(x) = 1 \quad (x > 0)$.

【解】 (1) $f'(x) = \frac{1}{x}$, 两边对 x 积分, 得

$$\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x} dx, \quad f(x) = \ln x + C.$$

(2) $f(x)f'(x) = 1$, 两边对 x 积分, 得

$$\int f(x)f'(x) dx = \int dx,$$

从而

$$\int f(x)df(x) = x + C_1 \Rightarrow \frac{1}{2}f^2(x) = x + C_1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + C}.$$

【例 4-4】 用凑微分法求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x(1+2x)}; \quad (2) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}; \quad (3) \int \frac{dx}{A\sin^2 x + B\cos^2 x};$$

$$(4) \int \frac{dx}{1+\sin x}; \quad (5) \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx.$$

【解】 (1) 方法一

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{1+2x} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{1+2x} d(2x) \\ &= \ln \left| \frac{x}{1+2x} \right| + C. \end{aligned}$$

方法二

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{x^2 \left(\frac{1}{x} + 2 \right)} = - \int \frac{1}{\frac{1}{x} + 2} d \frac{1}{x} = - \ln \left| \frac{1}{x} + 2 \right| + C.$$

$$(2) \text{原式} = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx = \int \frac{d(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = - \frac{1}{e^x + 1} + C.$$

$$(3) \text{若 } A = 0, \text{ 原式} = \int \frac{\sec^2 x}{B} dx = \frac{\tan x}{B} + C;$$

$$\text{若 } B = 0, \text{ 原式} = \int \frac{\csc^2 x}{A} dx = - \frac{\cot x}{A} + C;$$

若 $A \neq 0, B \neq 0$ 且 A, B 同号,

$$\text{原式} = \int \frac{\sec^2 x}{A \tan^2 x + B} dx = \frac{1}{B} \int \frac{d \tan x}{1 + \frac{A}{B} \tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \arctan \left(\sqrt{\frac{B}{A}} \tan x \right) + C;$$

若 A, B 异号,

$$\text{原式} = \int \frac{d \tan x}{A \tan^2 x + B} = \frac{1}{2 \sqrt{-AB}} \ln \left| \frac{\tan x - \sqrt{-\frac{B}{A}}}{\tan x + \sqrt{-\frac{B}{A}}} \right| + C.$$

$$(4) \text{原式} = \int \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \sec x + C.$$

$$(5) \text{原式} = \int \frac{\sin x d \sin x}{1 + \sin^4 x} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{d \sin^2 x}{1 + \sin^4 x} = \frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + C.$$

【例 4-5】 用换元积分法求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}}; \quad (2) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad (3) \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx.$$

$$\text{【解】 (1) 原式} = - \frac{1}{2} \int \frac{(-2x+1)-1}{\sqrt{5+x-x^2}} dx = - \frac{1}{2} \int \frac{d(5+x-x^2)}{\sqrt{5+x-x^2}} +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\sqrt{21}}{2}x - \frac{\sqrt{21}}{4}\right) + C. \end{aligned}$$

(2) 不妨设 $a > 0$, 令 $x = a \tan t$, $|t| \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = a \sec^2 t dt$, 于是

$$\text{原式} = \int \frac{a \sec^2 t dt}{a^3 \sec^3 t} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{\sin t}{a^2} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

(3) 令 $\sqrt{x+1} + 1 = t$, 则 $x = (t-1)^2 - 1$, $dx = 2(t-1)dt$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{t-2}{t} \cdot 2(t-1)dt = 2 \int \left(t - 3 + \frac{2}{t}\right) dt = t^2 - 6t + 4 \ln t + C \\ &= x - 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1} + 1) + C. \end{aligned}$$

【例 4-6】 用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx;$

(2) $\int \cos(\ln x) dx;$

(3) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx;$

(4) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

【解】 (1) 原式 $= -2 \int \arcsin x d\sqrt{1-x} = -2 \sqrt{1-x} \arcsin x +$

$$2 \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2 \sqrt{1-x} \arcsin x + 2 \int \frac{d(1+x)}{\sqrt{1+x}}$$

$$= -2 \sqrt{1-x} \arcsin x + 4 \sqrt{1+x} + C.$$

(2) 设 $I = \int \cos(\ln x) dx$, 则

$$\begin{aligned} I &= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \\ &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I + C_1, \end{aligned}$$

于是

$$I = \frac{1}{2} [x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)] + C.$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= - \int x e^x d \frac{1}{x+1} = - \frac{x e^x}{x+1} + \int \frac{e^x + x e^x}{x+1} dx \\ &= - \frac{x e^x}{x+1} + \int e^x dx = - \frac{x e^x}{x+1} + e^x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ 原式} &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \end{aligned}$$

$$\int \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

注 当被积函数为多项式与三角函数或反三角函数或指数函数或对数函数的乘积时, 常用分部积分法; 若被积函数为三角函数与指数函数的乘积时, 常用分部积分法解出一个关于原积分的等式, 然后解出原积分.

【例 4.7】 求下列不定积分的递推公式:

$$(1) I_n = \int x^n e^{kx} dx; \quad (2) I_n = \int (\ln x)^n dx; \quad (3) I_n = \int \tan^n x dx;$$

$$(4) I_n = \int (\arcsin x)^n dx.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} (1) I_n &= \frac{1}{k} \int x^n d e^{kx} = \frac{1}{k} x^n e^{kx} - \frac{1}{k} \int e^{kx} n x^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{k} x^n e^{kx} - \frac{n}{k} I_{n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) I_n &= \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int x d(\ln x)^n \\ &= x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = x(\ln x)^n - n I_{n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) I_n &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x d \tan x - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) I_n &= \int (\arcsin x)^n dx = x(\arcsin x)^n - n \int (\arcsin x)^{n-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x(\arcsin x)^n + n \int (\arcsin x)^{n-1} d \sqrt{1-x^2} \\ &= x(\arcsin x)^n + n(\arcsin x)^{n-1} \sqrt{1-x^2} - \\ &\quad n(n-1) \int (\arcsin x)^{n-2} dx \\ &= x(\arcsin x)^n + n(\arcsin x)^{n-1} \sqrt{1-x^2} - n(n-1) I_{n-2}. \end{aligned}$$

【例 4.8】 求下列有理函数的积分:

$$(1) \int \frac{dx}{1+x^3}; \quad (2) \int \frac{dx}{1+x^4}.$$

【解】 (1) 设 $\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2}$, 其中 A, B, C 为待定系数, 通分, 然后令分子相等得: $(A+B)x^2 + (B+C-A)x + A+C = 1$, 比较同次幂的系数得线性方程组:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{1-x+x^2} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\int \frac{dx}{1+x} - \int \frac{x-2}{1-x+x^2} dx \right). \\
 \int \frac{x-2}{1-x+x^2} dx &= 2 \int \frac{(2x-1)-3}{1-x+x^2} dx = 2 \int \frac{d(x^2-x+1)}{1-x+x^2} - 6 \int \frac{dx}{1-x+x^2} \\
 &= 2 \ln(1-x+x^2) - 6 \int \frac{dx}{\frac{3}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \\
 &= 2 \ln(1-x+x^2) - 6 \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C_0.
 \end{aligned}$$

$$\text{故原式} = \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{2}{3} \ln(1-x+x^2) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C$$

$$(3) \text{ 记 } I(x) = \int \frac{dx}{1+x^4}, J(x) = \int \frac{x^2}{1+x^4} dx, \text{ 则}$$

$$I(x) + J(x) = \int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + C_1;$$

$$I(x) - J(x) = \int \frac{1-x^2}{1+x^4} dx = \int \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = - \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}} \right| + C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + C_2.$$

$$\text{所以 } I(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + C.$$

【例 4-9】 计算 $\int \frac{dx}{x(1+x^{10})}$.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】 方法一} \quad \text{原式} &= \int \frac{x^9 dx}{x^{10}(1+x^{10})} = \frac{1}{10} \int \frac{dx^{10}}{x^{10}(1+x^{10})} \\
 &= \frac{1}{10} \int \left(\frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{1+x^{10}} \right) dx^{10} = \frac{1}{10} \ln \frac{x^{10}}{1+x^{10}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\text{方法二} \quad \text{原式} = \int \frac{dx}{x^{11}(x^{-10}+1)} = -\frac{1}{10} \int \frac{dx^{-10}}{x^{-10}+1}$$

$$= -\frac{1}{10} \ln(x^{-10} + 1) + C.$$

【例 4-10】 求下列三角函数有理式的积分:

$$(1) \int \frac{dx}{2 + \sin^2 x};$$

$$(2) \int \frac{dx}{1 + \tan x};$$

$$(3) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx;$$

$$(4) \int \frac{\cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

【解】 (1) 原式 $= \int \frac{dx}{2 + \sin^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{2 \sec^2 x + \tan^2 x} = \int \frac{d \tan x}{3 \tan^2 x + 2}$
 $= \frac{\sqrt{6}}{6} \arctan \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \tan x \right) + C.$

注 本题也可利用万能公式求解.

(2) 记 $I = \int \frac{dx}{1 + \tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$, $J = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, 则
 $I + J = \int dx = x + C_1,$

$$I - J = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| + C_2.$$

于是 原式 $= I = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C.$

注 本题可令 $\tan x = t$ 进行求解, 也很简单.

(3) 原式 $= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}$
 $= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{1 - \sin^2 x} \right) d \sin x = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C.$

(4) 记 $I = \int \frac{\cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$, $J = \int \frac{\sin x}{\sin x + 2 \cos x} dx$, 则
 $2I + J = \int dx = x + C_1,$

$$I - 2J = \int \frac{\cos x - 2 \sin x}{\sin x + 2 \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + 2 \cos x)}{\sin x + 2 \cos x} = \ln |\sin x + 2 \cos x| + C_2,$$

解得 $I = \frac{2}{5} x + \frac{1}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x| + C.$

【例 4-11】 求下列无理函数的积分:

(1) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$; (2) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$; (3) $\int \frac{dx}{x \sqrt[4]{1+x^4}}.$

【解】 (1) 原式 $= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}}$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \sqrt{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \int \sqrt{\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}} d\left(-\frac{1}{x}\right) \stackrel{\text{令 } \frac{1}{x}=t}{=} - \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} dt \\ &= - \int \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-1)}{\sqrt{t^2-1}} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \\ &= -\sqrt{t^2-1} + \ln \left| t + \sqrt{t^2-1} \right| + C \\ &= -\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} + \ln \left| \frac{1}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \right| + C. \end{aligned}$$

(3) 令 $\sqrt[4]{1+x^4} = t$, 则

$$x = (t^4 - 1)^{\frac{1}{4}}, \quad dx = \frac{1}{4}(t^4 - 1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 4t^3 dt,$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{(t^4 - 1)^{\frac{1}{4}} \cdot t} \cdot \frac{1}{4}(t^4 - 1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 4t^3 dt = \int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t^2 + 1} + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan \sqrt[4]{1+x^4} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1} \right| + C. \end{aligned}$$

【例 4-12】 计算 $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}}$.

【解】 令 $x = \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t} = \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos t dt}{\sin t + \cos t} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin t + \cos t + \cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin t + \cos t)}{\sin t + \cos t} \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \ln |\sin t + \cos t| + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1-x^2}| + C. \end{aligned}$$

§2 定积分

一、基本要求

1. 理解定积分的概念、几何意义和物理意义.
2. 掌握定积分的性质和定积分中值定理.
3. 理解由变限定积分定义的函数, 并会求它的导数.
4. 掌握牛顿-莱布尼茨公式.
5. 掌握定积分的换元积分法和分部积分法.
6. 理解函数可积的充要条件, 掌握几类函数(连续函数、具有有限个间断点的有界函数)的可积性.

二、主要概念和结论

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 有定义. 下面分四步来概述定积分的定义:

① 分割: 在 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间(称为 $[a, b]$ 的一个分法, 记为 Δ), 小区间的长度记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

② 取点: 在每个小区间上任取一点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

③ 作和: $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ (该和式称为黎曼和);

④ 求极限: 记 $\lambda = \lambda(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|$, 若极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在(设为 I), 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 黎曼可积, 简称可积, 极限 I 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的定积分, 记作

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

2. 定积分的基本性质

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界.

(2) 线性性质 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, α 与 β 为任意实数, 则 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 在 $[a, b]$ 也可积, 并且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(3) 区间可加性 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则对于任意给定的 $c \in [a, b]$, $f(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 都可积, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(4) 单调性 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 且 $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(5) 绝对可积性 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 也可积, 且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(6) 积分第一中值定理 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 不变号, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.

(7) 积分第二中值定理 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 单调, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx.$$

特别, 若 $g(x)$ 单调上升且 $g(a) \geq 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx;$$

若 $g(x)$ 单调下降且 $g(b) \geq 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

3. 定积分的计算

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

由此可见, 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则其原函数存在.

(2) 微积分基本公式 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的一个原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

特别, 由(1)可知, 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 该公式一定成立.

这个公式也称为牛顿-莱布尼茨公式.

(3) 换元积分法 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $x = \varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 有连续的导数 $\varphi'(t)$, 且满足 $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $a \leq \varphi(t) \leq b$, $t \in [\alpha, \beta]$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

(4) 分部积分法 若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 $[a, b]$ 有连续的导数, 则有

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

4. 达布和 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 记 $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. 对 $[a, b]$ 的任意分法 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 记 $M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$, $m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ ($i = 1, 2, \cdots, n$). 分别称 $S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$, $s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ 为 $f(x)$ 对这一分法的达布上和与达布下和, 简称上和与下和, 统称为达布和.

5. 达布和的主要性质

(1) 对 $[a, b]$ 的同一分法, S 与 s 分别是所有黎曼和的上确界与下确界, 即

$$S = \sup_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad s = \inf_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

并且 $m(b-a) \leq s \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq S \leq M(b-a)$.

(2) 若在 $[a, b]$ 的一个分法 Δ 的分点外插入新的分点以构成新的分法 Δ' , 则达布上和 S 不增, 达布下和 s 不减.

(3) 任一个下和总不超过任一个上和, 即使它们对应于不同的分法.

由此可知, 全体下和集合有上界, 全体上和集合有下界. 根据确界定理, 全体下和集合有上确界 I , 全体上和集合有下确界 \bar{I} , 分别称 I 和 \bar{I} 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的下积分和上积分, 并且有 $s \leq I \leq \bar{I} \leq S$ 及 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = \bar{I}$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I$.

这一结论通常称为达布定理.

6. 可积的充要条件

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积的第一充要条件: $I = \bar{I}$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积的第二充要条件: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$.

$= 0$, 或 $\forall \epsilon > 0$, 存在某种分法 Δ , 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon$. 其中 $\omega_i = \omega_i(f) = M_i - m_i$, 它称为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的振幅 ($i = 1, 2, \dots, n$).

(3) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积的第三充要条件: $\forall \epsilon > 0, \forall \sigma > 0$, 存在某种分法 Δ , 使得对应于振幅 $\omega_k \geq \sigma$ 的小区间 Δx_k 的总长度 $\sum_k \Delta x_k < \epsilon$.

7. 可积函数类 以下三类定义在 $[a, b]$ 的函数在 $[a, b]$ 必可积:

- (1) 连续函数;
- (2) 只有有限个间断点的有界函数;
- (3) 单调函数.

三、常用解题方法与典型例题

【例 4.13】 用定义求积分 $\int_a^b x dx$ ($0 < a < b$).

【解】 因为 $f(x) = x$ 在 $[a, b]$ 连续, 所以必可积. 将 $[a, b]$ 等分成 n 个小区间, 第 i 个小区间为 $\left[a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1), a + \frac{b-a}{n} \cdot i \right]$, 其长度为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. 在每一个小区间取 $\xi_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$, 作和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i \right) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \left[na + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= (b-a) \left[a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(n+1)}{2} \right]. \end{aligned}$$

所以 $\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

【例 4.14】 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

其中 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i, \theta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|$.

【证明】 因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故 $f(x)g(x)$ 也在 $[a, b]$ 连续, 从而 $f(x)g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 由定积分的定义可知:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g(\xi_i) \Delta x_i.$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g(\theta_i) \Delta x_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(\xi_i) + g(\theta_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(\theta_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i,\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续知, $\exists M > 0$, $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. 因为 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 一致连续, 于是 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $\lambda < \delta$ 时, 有

$$|g(\theta_i) - g(\xi_i)| \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n).$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) [g(\theta_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i| &= \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| |g(\theta_i) - g(\xi_i)| |\Delta x_i| \\ &\leq M \cdot \frac{\epsilon}{M(b-a)} \cdot (b-a) = \epsilon,\end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g(\theta_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

【例 4-15】 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots (2n+1)}.$$

$$\text{【解】 } (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\ln \sqrt[n]{\frac{n}{n} \frac{n+1}{n} \cdots \frac{2n-1}{n} (2n)(2n+1)} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{n+1}{n} \cdots \frac{2n-1}{n} (2n)(2n+1)} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n) + \ln(2n+1)}{n} \right) \\ &= \exp \left(\int_0^1 \ln(1+x) dx \right) = \exp(\ln 4 - 1) = 4e^{-1}.\end{aligned}$$

【例 4-16】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$, 证明 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

【证明】 因为 $f(x) \not\equiv 0$ 且 $f(x) \geq 0$, 不妨设 $\exists c \in (a, b)$, 使得 $f(c) > 0$, 又 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x) > \frac{f(c)}{2} > 0$, $\forall x \in (c-\delta, c+\delta) \subset (a, b)$, 于是

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx$$

$$\geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx \geq \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta > 0.$$

【例 4-17】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) = 0$, 求证

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

【证明】 方法一 因为 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 所以 $|f'(x)|$ 在 $[a, b]$ 有最大值, 设 $M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$. 对 $f(x)$ 在 $[a, x]$ ($x \in (a, b]$) 应用拉格朗日中值定理得, $f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$, 其中 $a < \xi < x$. 从而,

$$|f(x)| \leq M(x-a).$$

所以
$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b M(x-a) dx \\ &= M \cdot \frac{1}{2}(x-a)^2 \Big|_a^b = \frac{(b-a)^2}{2} \cdot M. \end{aligned}$$

方法二 同样设 $M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$. 由分部积分法得,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) d(x-b) = f(x)(x-b) \Big|_a^b - \int_a^b (x-b) f'(x) dx \\ &= \int_a^b (b-x) f'(x) dx. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (b-x) f'(x) dx \right| \leq \int_a^b |(b-x) f'(x)| dx \\ &\leq M \int_a^b (b-x) dx = \frac{(b-a)^2}{2} \cdot M. \end{aligned}$$

【例 4-18】 设 $0 < \delta < 1$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\delta}^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} = 0$.

【证明】
$$0 \leq \frac{\int_{\delta}^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} = \frac{\int_{\delta}^1 (1-t^2)^n dt}{\int_{\frac{\delta}{2}}^1 (1-t^2)^n dt + \int_0^{\frac{\delta}{2}} (1-t^2)^n dt}$$

$$< \frac{\int_{\delta}^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^{\frac{\delta}{2}} (1-t^2)^n dt} \leq \left(\frac{1-\delta^2}{1-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \right)^n \cdot \frac{1-\delta}{\frac{\delta}{2}}.$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\delta^2}{1-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \right)^n \cdot \frac{1-\delta}{\frac{\delta}{2}} = 0.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} = 0.$$

【例 4-19】 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 求证

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx},$$

而且等号成立当且仅当 $g(x) = \lambda f(x)$ (或 $f(x) = \lambda g(x)$), 其中 λ 为常数.

【证明】 考察积分 $\int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx$, 其中 λ 为任意实数. 因为

$$\int_a^b f^2(x)dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx \geq 0,$$

这是关于 λ 的不等式, 且左端为二次三项式, 所以其判别式

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x)dx \right\}^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0,$$

即
$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

因 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故

$$\int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda g(x).$$

又

$$\int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \left\{ \int_a^b f(x)g(x)dx \right\}^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx = 0,$$

所以

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \Leftrightarrow f(x) = \lambda g(x).$$

注 该不等式称为施瓦茨不等式. 它有很多重要的应用. 它可以看作柯

西不等式 $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$ 在“连续”情形下的表现形式.

【例 4-20】 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx; \quad (2) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx.$$

【解】 (1) 原式 $= \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2.$

$$(2) \text{ 原式} = \int_1^e \ln x dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e - (x \ln x - x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 \\ = 2 - 2e^{-1}.$$

【例 4-21】 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad (2) \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}}; \quad (3) \int_0^3 \frac{x dx}{1 + \sqrt{1+x}};$$

$$(4) \int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx; \quad (5) \int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \quad (a > 0).$$

【解】 (1) 不妨设 $a \geq 0$, 令 $x = a \sin t$, 则

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \cdot a \cos t \cdot a \cos t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi}{16} a^4.$$

$$(2) \text{ 令 } x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t, \text{ 则 } dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 t dt, \text{ 于是,}$$

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{dx}{\left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 t}{\frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{4}} \sec^3 t} dt = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt \\ = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

(3) 令 $\sqrt{1+x} = t$, 则 $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$, 当 $x = 0$ 时, $t = 1$; 当 $x = 3$ 时, $t = 2$.

$$\text{原式} = \int_1^2 \frac{(t^2 - 1) 2t dt}{1 + t} = 2 \int_1^2 (t^2 - t) dt = \left(\frac{2}{3} t^3 - t^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{3}.$$

$$(4) \text{ 令 } t = x^2,$$

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^2 e^{-x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} t e^{-t} dt = -\frac{1}{2} t e^{-t} \Big|_0^{\ln 2} - \frac{1}{2} e^{-t} \Big|_0^{\ln 2} \\ = \frac{1 - \ln 2}{4}.$$

$$(5) \text{ 令 } x = a \sin t,$$

$$\text{原式} = \int_0^a x^2 \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \frac{a-a \sin t}{a \cos t} a \cos t dt \\ = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^3 t) dt = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) d \cos t \\ = a^3 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + a^3 \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) a^3.$$

【例 4-22】 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

【解】 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx,$$

于是

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

故

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

【例 4-23】 设 $f(x)$ 在所示区间是连续函数, 证明

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx;$$

$$(3) \int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^{a^2} f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{2x} \quad (a > 0);$$

$$(4) \int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x) dx.$$

【证明】 (1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

(2) 令 $x = \pi - t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx &= \int_0^{\pi} \pi f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t) dt \\ &= \int_0^{\pi} \pi f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

(3) 令 $x^2 = t$, 则 $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$, 于是

$$\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{1}{2t} dt = \int_1^{a^2} f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{2x}.$$

(4) 令 $x^2 = t$, 则

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \int_0^a \frac{1}{2} x^2 f(x^2) dx^2 = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} t f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx.$$

【例 4-24】 利用分部积分证明

$$\int_0^x f(u)(x-u) du = \int_0^x \left(\int_0^u f(x) dx \right) du.$$

【证明】 方法一

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \int_0^x (x-u) d \left[\int_0^u f(x) dx \right] \\ &= (x-u) \int_0^u f(x) dx \Big|_0^x - \int_0^x \left[\int_0^u f(x) dx \right] d(x-u) \\ &= 0 + \int_0^x \left(\int_0^u f(x) dx \right) du = \text{右端}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{方法二} \quad \text{右端} &= u \int_0^u f(x) dx \Big|_0^x - \int_0^x u d \left[\int_0^u f(x) dx \right] \\ &= x \int_0^x f(u) du - 0 - \int_0^x u f(u) du = \int_0^x (x-u) f(u) du \\ &= \text{左端}. \end{aligned}$$

【例 4-25】 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 求证:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f'(x)(x-a)(x-b) dx;$$

$$(2) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

【证明】 (1)

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) df'(x) \\ &= \frac{1}{2} (x-a)(x-b) f'(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f'(x) [(x-a) + (x-b)] dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_a^b (x-b) df(x) - \frac{1}{2} \int_a^b (x-a) df(x) \\ &= -\frac{1}{2} (x-b) f(x) \Big|_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} f(x)(x-a) \Big|_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx = \text{左边}. \end{aligned}$$

(2) 由(1)知,

$$\text{左边} = \left| \frac{1}{2} \int_a^b f'(x)(x-a)(x-b) dx \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \cdot$$

$$\left| \int_a^b (x-a)(x-b)dx \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \cdot$$

$$\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

【例4-26】 证明连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数，连续的偶函数的原函数中有且只有一个为奇函数。

【证明】 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 连续，则 $f(x)$ 的一切原函数可写成 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ 。当 $f(-x) = -f(x)$ 时，利用换元积分法可得， $F(-x) = F(x)$ ，即 $f(x)$ 的任一原函数为偶函数。当 $f(x) = f(-x)$ 时，同理可得，只有当 $C = 0$ 时， $F(-x) = -F(x)$ ，于是 $f(x)$ 仅有一个原函数是奇函数。

【例4-27】 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$ 。

【解】 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的待定型，由洛必达法则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0.$$

【例4-28】 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续且单调上升，求证函数 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ 在 $(0, +\infty)$ 可导且单调上升。

【证明】 因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续，所以 $\int_0^x f(t)dt$ 在 $(0, +\infty)$ 可导，故 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导。 $\forall x \in (0, +\infty)$ ，由 $f(x)$ 的单调性知： $\int_0^x f(t)dt \leq (x-0)f(x)$ ，从而 $f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \geq 0$ ，所以

$$F'(x) = \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x} \left[f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right] \geq 0,$$

故 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调上升。

【例4-29】 设 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时连续，对任意 $a, b > 0$ ，积分值 $\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关，求证 $f(x) = \frac{c}{x}$ (c 为常数)。

【证明】 令 $h(x) = \int_x^{bx} f(t)dt$ ，则 $h(x)$ 在 $x > 0$ 时可导，由于 $\int_a^{ab} f(x)dx$

与 a 无关, 所以 $h'(x) = (bx)'f(bx) - f(x) = bf(bx) - f(x) = 0$. 令 $x = 1$, 则 $bf(b) - f(1) = 0$, 即 $bf(b) = f(1)$, 由 b 的任意性知 $xf(x) = f(1)$. 取 $c = f(1)$, 得 $f(x) = \frac{c}{x}$.

【例 4-30】 (武汉大学 2000 年) 设 $f(x)$ 在任一有限区间可积分, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. 求证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l$.

【证明】 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X_1 > 0$, 当 $x > X_1$ 时, 有 $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是, 对于 $x (x > X_1 > 0)$, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} - l \right| &= \left| \frac{\int_0^x f(t) dt - \int_0^x l dx}{x} \right| = \frac{\left| \int_0^x [f(t) - l] dt \right|}{x} \\ &\leq \frac{\int_0^x |f(t) - l| dt}{x} \leq \frac{\int_0^{X_1} |f(t) - l| dt}{x} + \frac{\int_{X_1}^x \varepsilon dt}{2x} \\ &= \frac{\int_0^{X_1} |f(t) - l| dt}{x} + \frac{\varepsilon(x - X_1)}{2x}, \end{aligned}$$

由于 $\int_0^{X_1} |f(t) - l| dt$ 为常数, 故 $\exists X_2 > 0$, 当 $x > X_2$ 时, $\frac{\int_0^{X_1} |f(t) - l| dt}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 则当 $x > X$ 时, $\left| \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l$.

注 (1) 本题的典型错误证法是: 对 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ 应用洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

(2) 本题与例 1-25 是同一个极限过程在变量为“连续的”和“离散的”情形下的不同表现形式.

(3) 可类似地证明: 当 $a = +\infty$ 或 $a = -\infty$ 时, 结论仍成立.

【例 4-31】 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 其积分是 I , 今在 $[a, b]$ 内有限个点改变 $f(x)$ 的值使它成为另一函数 $f^*(x)$, 证明 $f^*(x)$ 也在 $[a, b]$ 可积, 并且积分为 I .

【证明】 令 $F(x) = f(x) - f^*(x)$, $x \in [a, b]$. 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 除有限个点外处处为零, 即 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 除有限个点外处处连续, 故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 且 $\int_a^b F(x)dx = 0$. 又可积函数之差仍为可积函数, 故 $f^*(x) = f(x) - F(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 且 $\int_a^b f^*(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b F(x)dx = I - 0 = I$.

【例 4-32】 设有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的不连续点全体为 $\{x_n | n = 1, 2, \dots\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

分析 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, 有 $x_n \in [a, a + \varepsilon)$. 把 $[a, b]$ 分成两部分: $[a, a + \varepsilon)$ 中虽然含 $f(x)$ 的无穷多个不连续点, 但 $f(x)$ 在其有界, 且区间长度不大于 ε ; 在 $[a + \varepsilon, b]$ 中 $f(x)$ 只有有限个不连续点, 故 $f(x)$ 在 $[a + \varepsilon, b]$ 可积. 利用函数可积的充要条件可得 $f(x)$ 的可积性.

【证明】 方法一(利用可积的第二充要条件) 设 $|f(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, 有 $x_n \in \left[a, a + \frac{\varepsilon}{2M}\right)$. 于是在 $\left[a + \frac{\varepsilon}{2M}, b\right]$ 中 $f(x)$ 只有有限个不连续点, 故 $f(x)$ 在 $\left[a + \frac{\varepsilon}{2M}, b\right]$ 可积. 从而存在 $\left[a + \frac{\varepsilon}{2M}, b\right]$ 的分法 Δ' , 使 $\sum_S \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. 而对 $\left[a, a + \frac{\varepsilon}{2M}\right]$ 的任一分法 Δ'' , 总有 $\sum_{\Delta''} \omega_i \Delta x_i < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$. 把 Δ' 与 Δ'' 的分点合起来, 构成 $[a, b]$ 的一个分法 (此时 $x = a + \frac{\varepsilon}{2M}$ 为分点), 记为 Δ , 有 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{\Delta'} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\Delta''} \omega_i \Delta x_i < 2\varepsilon$. 由可积的第二充要条件知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

方法二 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \sigma > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 知, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, 有 $x_n \in \left[a, a + \frac{\varepsilon}{2}\right]$. 在 $\left[a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right]$ 中 $f(x)$ 只有有限个(最多 N 个)不连续点, 从而与它们相关的子区间最多只有 $2N$ 个, 在其有 $\omega_k \geq \sigma$. 不妨设 $f(x)$ 在 $\left[a, a + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 的振幅 $\omega \geq \sigma$. 作 $\left[a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right]$ 的分法 Δ' , 使对应的 $\lambda(\Delta') < \frac{\varepsilon}{4N}$. 在分法 Δ' 的基础增加分点 a 和 $a + \frac{\varepsilon}{2}$, 得到 $[a, b]$ 的一个分法 Δ , 则在分法 Δ

下所有对应振幅 $\omega_k \geq \sigma$ 的子区间长度之和 $\sum_k \Delta x_k < \frac{\epsilon}{2} + 2N \cdot \frac{\epsilon}{4N} = \epsilon$, 由可积的第三充要条件知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

【例 4-33】 判断下列函数在区间 $[0, 1]$ 的可积性:

(1) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 有界, 不连续点为 $x = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$;

(2) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right), & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

【解】 本题两个小题都是例 4-32 的特例, 也可以直接证明, 下面仅对 (2) 给出证明.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 有界, 其不连续点是 $0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, 并且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的任何部分区间的振幅 $\omega \leq 2$. $\forall \epsilon > 0$, 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\epsilon}{6}, 1\right]$ 只有有限个间断点, 故可积. 因此 $\exists \eta > 0$, 使对 $\left[\frac{\epsilon}{6}, 1\right]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 就有 $\sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{6}$. 显然, 若 $[\alpha, \beta] \subset \left[\frac{\epsilon}{6}, 1\right]$, 则对于 $[\alpha, \beta]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 也有 $\sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{6}$. 令 $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{6}, \eta\right\}$, 现设 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_0} < x_{i_0+1} < \dots < x_n = 1$ 是 $[0, 1]$ 的满足 $\max |\Delta x_i| < \delta$ 的任一分法. 设 $x_{i_0} \leq \frac{\epsilon}{6} < x_{i_0+1}$, 因此, 有 $\sum_{i=i_0+1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{6}$. 显然

$$\sum_{i=1}^{i_0} \omega_i \Delta x_i \leq 2 \sum_{i=1}^{i_0} \Delta x_i < 2 \cdot \frac{2\epsilon}{6} = \frac{4\epsilon}{6}.$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_0} \omega_i \Delta x_i + \omega_{i_0+1} \Delta x_{i_0+1} + \sum_{i=i_0+2}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{4\epsilon}{6} + \frac{2\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6}$$

由此可知, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$. 故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间可积.

【例 4-34】 若函数 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 可积, 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0,$$

其中 $A < a < b < B$ (这一性质称为积分的连续性).

【证明】 因 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 可积, 故 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 使得对 $[A, B]$ 的 n 等分法 $\Delta: x_i = A + \frac{i}{n}(B - A), i = 0, 1, 2, \dots, n$, 满足:

$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{4}$, 其中 ω_i 是 $f(x)$ 在第 i 小区间的振幅. 取 $\delta = \min\left\{a - A, B - b, \frac{B - A}{n}\right\}$, 则当 $0 < h < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x+h) - f(x)| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [|f(x+h) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)|] dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\omega_{i+1} + \omega_i) dx = \sum_{i=1}^n (\omega_{i+1} + \omega_i) \Delta x_i < \epsilon. \end{aligned}$$

由此可得, 当 $h \rightarrow 0^+$ 时结论成立. 同理可证 $h \rightarrow 0^-$ 时结论也成立.

§ 3 定积分的应用

一、基本要求

1. 掌握微元法, 会用定积分表达和计算一些物理量(液体压力、功、平均值).
2. 掌握用定积分表达和计算平面图形的面积、旋转体的体积、已知截面面积的立体体积、曲线的弧长.

二、主要概念和结论

1. 平面图形的面积(见图 4-1)

(1) 设图形由 $x = a, x = b (a < b), y = f(x)$ 以及 x 轴所围成, 其面积为

$$A_2 = \int_a^b |f(x)| dx \text{ (当 } f(x) \geq 0 \text{ 时, 为 } A_1 = \int_a^b f(x) dx).$$

(2) 设图形由 $x = a, x = b (a < b), y = f(x)$ 以及 $y = g(x)$ 所围成, 其面积为

$$A_4 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ (当 } f(x) \geq g(x) \text{ 时, 为 } A_3 = \int_a^b [f(x) -$$

$g(x)]dx$).

(3) 设图形由 $\theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta), r = r(\theta)$ 所围成, 其面积为

$$A_5 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

(4) 设图形由 $\theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 及 $r = r_1(\theta), r = r_2(\theta) (r_1 \leq r_2)$ 所围成, 其面积为

$$A_6 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)] d\theta.$$

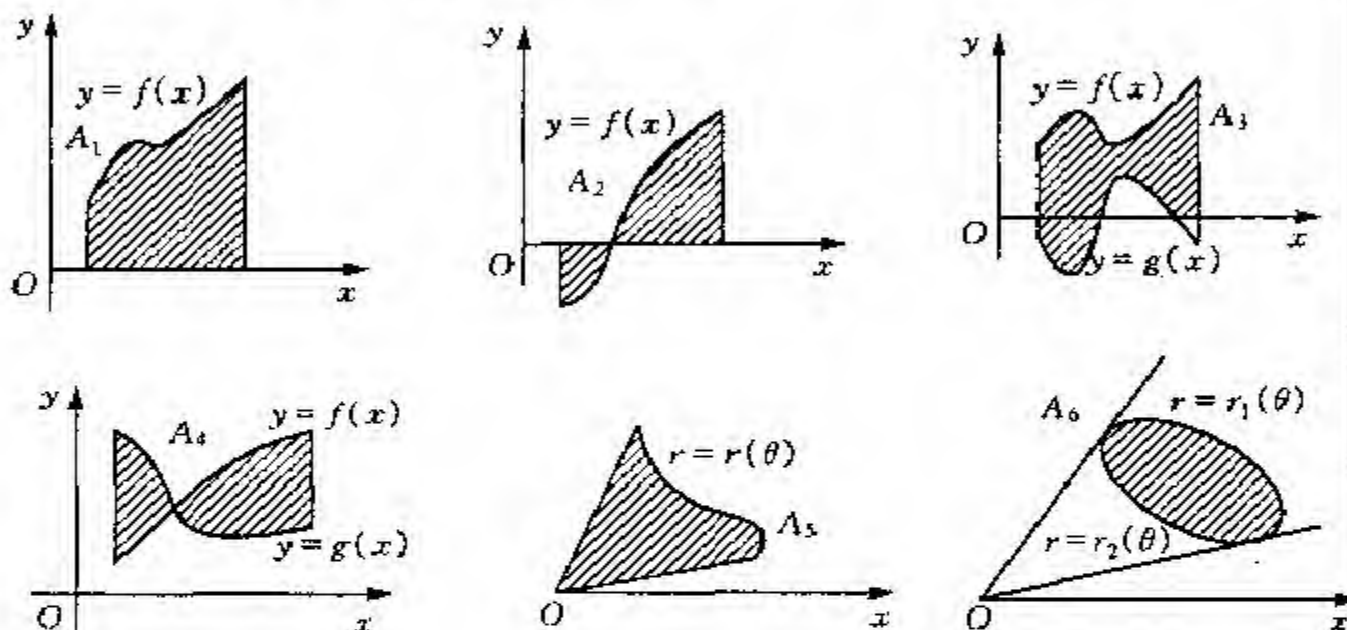


图 4-1

2. 光滑曲线的弧长

对于有向曲线弧, 弧长元素(弧微分): $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, 由此可知:

在直角坐标系: $ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy$;

参数方程: $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$;

极坐标系: $ds = \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$.

(1) 若平面曲线由 $y = f(x), a \leq x \leq b$ 给出, 则其弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

(2) 若平面曲线由极坐标方程 $r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$ 给出, 则其弧长

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

(3) 若平面曲线由参数方程 $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ 给出, 则其

弧长

$$s = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

(4) 若空间曲线由参数方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq \beta$ 给出, 则其弧长

$$s = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

3. 已知截面面积的立体体积

(1) 立体位于平面 $x = a$ 和 $x = b$ ($a < b$) 之间, 对每个 $x \in [a, b]$, 过 x 点且垂直于 x 轴的平面与立体的截面面积为 $A(x)$, 则立体体积

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

(2) 由连续曲线 $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

4. 由连续曲线 $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积

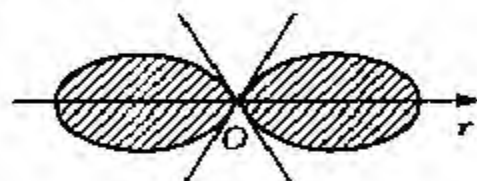
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

三、常用解题方法与典型例题

【例 4-35】 求双纽线 $r^2 = a^2 \cos^2 2\varphi$ 所围图形的面积.

【解】 由对称性知, $A = 4 \cdot$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2.$$



【例 4-36】 求下列曲线的弧长:

(1) $y = e^x$, $1 \leq x \leq 2$;

(2) 星射线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(3) 心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 (1) } s &= \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}} dx \\ &= \left(\sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right) \Big|_1^2 \\ &= \sqrt{1 + e^4} - \sqrt{1 + e^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{1+e^4}-1}{\sqrt{1+e^4}+1} \cdot \frac{\sqrt{1+e^2}+1}{\sqrt{1+e^2}-1} \right).$$

$$\begin{aligned} (2) \quad l &= \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[3a \cos^2 t (-\sin t)]^2 + [3a \sin^2 t \cos t]^2} dt \\ &= 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t} dt \\ &= \frac{3a}{4} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| d2t = \frac{3a}{4} \int_0^{4\pi} |\sin \theta| d\theta \\ &= 3a \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 6a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad l &= \int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1+\cos\theta)]^2 + (-a\sin\theta)^2} d\theta \\ &= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\theta} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 8a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2} = 8a. \end{aligned}$$

【例 4-37】 已知球半径为 R ，试求高为 h 的球冠的体积 ($h \leq R$)。

【解】 设球的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ，用平面 $Z = z$ ($h \leq z \leq R$) 去截球所得截面面积为 $A(z) = \pi(R^2 - z^2)$

$$V = \int_h^R A(z) dz = \int_h^R \pi(R^2 - z^2) dz = \pi \left(\frac{2R^3}{3} - R^2 h + \frac{h^3}{3} \right).$$

【例 4-38】 求下列各曲线所围成的图形面积：

- (1) $y^2 = 4(x+1)$, $y^2 = 4(1-x)$;
- (2) $y = x$, $y = x + \sin^2 x$ ($0 \leq x \leq \pi$);
- (3) $y = x^2$, $y = x + 5$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 (1) } S &= \int_{-2}^2 \left[\left(1 - \frac{y^2}{4} \right) - \left(\frac{y^2}{4} - 1 \right) \right] dy = \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \left(2y - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad S = \int_0^{\pi} [(x + \sin^2 x) - x] dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad S &= \int_{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} (x + 5 - x^2) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + 5x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{2} + 5\sqrt{21} - 2\sqrt{21} = \frac{7\sqrt{21}}{2}. \end{aligned}$$

【例 4-39】 求下列旋转体的体积：

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴;

(2) $y = \sin x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi)$ (i) 绕 x 轴, (ii) 绕 y 轴;

(3) 旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi), y = 0$
(i) 绕 x 轴; (ii) 绕 y 轴; (iii) 绕直线 $y = 2a$.

【解】 (1) $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$.

$$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

(2) (i) $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$;

(ii) $V = \pi \int_0^1 [(\pi - \arcsin y)^2 - (\arcsin y)^2] dy$
 $= \pi \int_0^1 (\pi^2 - 2\pi \arcsin y) dy = \pi^3 - 2\pi^2 \int_0^1 \arcsin y dy = 2\pi^2.$

(3) (i) 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned} A_x &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 d[a(t - \sin t)] \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= \frac{7}{2} \pi^2 a^3; \end{aligned}$$

(ii) 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned} A_y &= \pi \int_0^a [x_1^2(y) - x_2^2(y)] dy \\ &= a^3 \pi \int_0^\pi [(2\pi - t + \sin t)^2 - (t - \sin t)^2] \sin t dt \\ &= 4a^3 \pi^2 \int_0^\pi (\pi - t + \sin t) \sin t dt = 2a^3 \pi^3 (2\pi + 1); \end{aligned}$$

(iii) 绕直线 $y = 2a$ 旋转所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned} A_{y=2a} &= \pi \int_0^{2\pi} [(2a)^2 - (2a - y)^2] dx = 2\pi \int_0^{2\pi} (4a - y) y dx \\ &= 2\pi a^3 \int_0^\pi (3 + \cos t)(1 - \cos t)(1 - \cos t) dt = \frac{7\pi^2 a^3}{3}. \end{aligned}$$

【例 4.40】 求曲线 $xy = 4$ 在点 $(2, 2)$ 的曲率和曲率半径.

【解】 $y = \frac{4}{x}, y' = -\frac{4}{x^2}, y'' = \frac{8}{x^3}.$

$$K = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{8}{x^3} \left(1 + \frac{16}{x^4} \right)^{-\frac{3}{2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad R = \frac{1}{K} = 2\sqrt{2}.$$

【例 4-41】 求抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的曲率和曲率半径.

$$\text{【解】 } 2yy' = 2p, \quad y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p}{y^2} \cdot y' = -\frac{p^2}{y^3}, \quad K = \left| \frac{-\frac{p^2}{y^3}}{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right| =$$

$$\frac{p^2}{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

【例 4-42】 求平面曲线 $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ 绕 x 轴旋转所成曲面的面积.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } (1) S &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x} dx \\ &= -2\pi \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x} d\cos x = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 \theta} d\tan \theta \\ &= \pi [\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|] \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{2}\pi + 2\pi \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

§ 4 综合例题

【例 4-43】 (复旦大学 1999 年) 求不定积分 $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx &= \int \ln \frac{1+x}{1-x} d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{x^2}{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C. \end{aligned}$$

【例 4-44】 计算 $I = \int \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} dx$.

【解】 方法一 用第一、第二换元积分法.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} d\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= - \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du = - \int \frac{\sec t \tan t}{\tan t} dt \quad (\text{令 } u = \sec t) \\
 &= - \ln |\sec t + \tan t| + C = - \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| + C \\
 &= \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

方法二 令 $x = \sin t$, 得

$$I = \int \frac{\cos t}{\sin t \cos t} dt = \int \csc t dt = \ln |\csc t - \cot t| + C = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + C.$$

方法三 令 $x^2 = \frac{1}{t}$, 得

$$I = - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t \sqrt{1 - \frac{1}{t}}} dt = - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - t}} dt = \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right| + C.$$

方法四 令 $t = \sqrt{1 - x^2}$.

方法五 令 $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

【例 4-45】(浙江大学 2001 年) 求 $\int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}$.

【解】 $x^3 - 3x + 2 = x^3 - 1 - 3x + 3 = (x - 1)^2(x + 2)$, 令

$$\frac{1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2},$$

可解得

$$A = -\frac{2}{9}, B = \frac{2}{9}, C = \frac{1}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= -\frac{2}{9} \int \frac{dx}{x + 2} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x - 1)^2} \\
 &= -\frac{2}{9} \ln |x + 2| + \frac{2}{9} \ln |x - 1| - \frac{1}{3(x - 1)} + C.
 \end{aligned}$$

【例 4-46】(浙江大学 2002 年) 求不定积分 $\int \sqrt{1 + x^2} dx$.

【解】 设 $I = \int \sqrt{1 + x^2} dx$. 令 $x = \tan t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$, 则

$$\sqrt{1 + x^2} = \sec t, dx = dt \tan t.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sec t \operatorname{d} \tan t = \sec t \tan t - \int \tan t \operatorname{d} \sec t = \sec t \tan t - \int \sec t \tan^2 t \operatorname{d} t \\ &= \sec t \tan t - \int \sec t (\sec^2 t - 1) \operatorname{d} t = \sec t \tan t - I + \int \sec t \operatorname{d} t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } I &= \frac{1}{2} \sec t \tan t + \frac{1}{2} \int \sec t \operatorname{d} t = \frac{1}{2} \sec t \tan t + \frac{1}{2} \int \sec t \frac{\sec t + \tan t}{\sec t + \tan t} \operatorname{d} t \\ &= \frac{1}{2} \sec t \tan t + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{d}(\tan t + \sec t)}{\sec t + \tan t} \\ &= \frac{1}{2} \sec t \tan t + \frac{1}{2} \ln |\tan t + \sec t| + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

【例 4.47】 (上海交大 2000 年; 北师大 2004 年) 设 f 在 $[a, b]$ 连续且单调增加. 证明:

$$\int_a^b x f(x) \operatorname{d} x \geqslant \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \operatorname{d} x.$$

并证明式中, 等号仅当 f 为常值函数时成立.

【证明】 方法一 由于 $f(x)$ 单调上升, 利用积分第二中值定理, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) \operatorname{d} x &= f(a) \int_a^{\xi} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \operatorname{d} x + f(b) \int_{\xi}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \operatorname{d} x \\ &= f(a) \int_a^{\xi} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \operatorname{d} x + [f(b) - f(a)] \cdot \\ &\quad \int_{\xi}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \operatorname{d} x \\ &= [f(b) - f(a)] \left[\frac{b^2 - \xi^2}{2} - \frac{a+b}{2} (b - \xi) \right] \\ &= [f(b) - f(a)] \frac{(b - \xi)(\xi - a)}{2} \geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{方法二 } \int_a^b x f(x) \operatorname{d} x - \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \operatorname{d} x \\ = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \operatorname{d} x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \operatorname{d} x. \end{aligned}$$

在前一个积分中, 令 $y = x - a$, 在后一个积分中, 令 $y = b - x$, 则有

$$\int_a^b x f(x) \operatorname{d} x - \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \operatorname{d} x$$

$$= \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left(\frac{b-a}{2} - y \right) [f(b-y) - f(a+y)] dy \geq 0.$$

因此

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

方法三 作辅助函数(把 b 改为变量 t):

$$F(t) = \int_a^t xf(x)dx - \frac{a+t}{2} \int_a^t f(x)dx.$$

则易知 $F'(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$, 故 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 单调上升. 从而 $F(b) \geq F(a) = 0$.

若等号成立, 则应有 $f(b) - f(a) = 0$, 而 f 在 $[a, b]$ 单调增加, 所以当 f 为常值函数时才能成立.

【例 4-48】 (东南大学 2003 年) 求积分

$$\int_{-2}^2 x^2 \left(\frac{\sin^3 x}{1+x^6} + \sqrt{4-x^2} \right) dx.$$

【解】 因为 $y = \frac{x^2 \sin^3 x}{1+x^6}$ 在 $[-2, 2]$ 为奇函数, 故

$$\int_{-2}^2 \frac{x^2 \sin^3 x}{1+x^6} dx = 0.$$

于是

$$\text{原式} = \int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

令 $x = 2\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $dx = 2\cos\theta d\theta$, 则

$$\text{原式} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta \cos^2\theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta = 2\pi.$$

【例 4-49】 (电子科技大学 2003 年) 设 $f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t) dt$, 证明 $e^x |f(x)| \leq 2$.

$$\begin{aligned} \text{【证明】 } f(x) &= \int_x^{x+1} \sin(e^t) dt = \int_x^{x+1} -e^{-t} d\cos(e^t) \\ &= -e^{-t} \cos(e^t) \Big|_x^{x+1} + \int_x^{x+1} -e^{-t} \cos(e^t) dt \\ &= \frac{\cos(e^x)}{e^x} - \frac{\cos(e^{x+1})}{e^{x+1}} + \cos(e^x) \int_x^{x+1} (-e^{-t}) dt \\ &= \frac{1}{e^x} \left[\cos(e^x) - \frac{1}{e} \cos(e^{x+1}) \right] + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{e^x} \left[\frac{1}{e} \cos(e^x) - \cos(e^{x+1}) \right], \quad (x < \xi < x+1)$$

故
$$e^x |f(x)| = \left| \cos(e^x) - \frac{1}{e} \cos(e^{x+1}) - \cos(e^\xi) \left(1 - \frac{1}{e} \right) \right|$$

$$\leq 1 + \frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 2.$$

【例 4.50】 (华中师大 1998 年) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可微, 而且对 $\forall x \in (0, 1)$, 有 $|f'(x)| \leq M$, 求证: 对任何正整数 n , 有

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n},$$

其中 M 是一个与 x 无关的常数.

【证明】 由定积分的性质及积分中值定理, 有

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i),$$

其中 $\xi_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$, $i = 1, 2, \dots, n$. 又因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可微, 所以由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\eta_i \in \left(\xi_i, \frac{i}{n} \right)$, 使得

$$f\left(\frac{i}{n}\right) - f(\xi_i) = f'(\eta_i) \left(\frac{i}{n} - \xi_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n f'(\eta_i) \left(\xi_i - \frac{i}{n} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f'(\eta_i)| \left(\frac{i}{n} - \xi_i \right) \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n M \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

【例 4.51】 设 $f(x), g(x)$ 都在 $[a, b]$ 可积, 证明:

$M(x) = \max(f(x), g(x)), m(x) = \min(f(x), g(x))$ 在 $[a, b]$ 可积.

【证明】 由于 $M(x) = \frac{1}{2} [f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|],$

$$m(x) = \frac{1}{2} [f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|].$$

又 $f(x), g(x)$ 都在 $[a, b]$ 可积, 故 $f(x) \pm g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 也有 $|f(x) - g(x)|$ 在 $[a, b]$ 可积. 由定积分的性质, 知 $M(x), m(x)$ 都在 $[a,$

b) 可积.

【例 4.52】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 且 $f(x) \geq r > 0$, 求证:

(1) $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 可积; (2) $\ln f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

【证明】 由条件, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对于满足 $\lambda(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} < \delta$ 的

任意分法 Δ , 有 $\left| \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \right| < \varepsilon$. 其中

$$\omega_i(\Delta) = \sup \{ |f(x') - f(x'')| \}, \quad \forall x', x'' \in [x_i, x_{i+1}].$$

$$(1) \omega'_i(\Delta) = \sup \left\{ \left| \frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} \right| \right\}, \quad x', x'' \in [x_i, x_{i+1}].$$

$$\text{而} \quad \left| \frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} \right| = \frac{|f(x'') - f(x')|}{|f(x')f(x'')|} \leq \frac{|f(x'') - f(x')|}{r^2},$$

$$\text{所以有} \quad \omega'_i \leq \frac{1}{r^2} |f(x') - f(x'')|.$$

$$\text{则有} \quad \left| \sum_{i=1}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i \right| \leq \left| \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{r^2}.$$

所以 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 可积.

(2) 同理可证 $\ln f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

【例 4.53】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 求证对任给 $\varepsilon > 0$, 存在逐段为常数的函数 $\varphi(x)$, 使

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon.$$

【证明】 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $[a, b]$ 的任一满足 $\lambda(\Delta) < \delta$ 的分法, 有 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. 其中

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

由于

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

$$\text{故} \quad \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - m_i] \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

定义 $\varphi(a) = m_1$, $\varphi(x) = m_i, x \in (x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$, 便有

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon.$$

【例 4.54】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 定义 $\omega_f[a, b] = \sup_{x \in [a, b]} f(x) -$

$\inf_{x \in [a, b]} f(x)$, 求证

$$\omega_f[a, b] = \sup_{x', x'' \in [a, b]} |f(x') - f(x'')|.$$

【证明】 由于 $\sup_{x \in [a, b]} (-f(x)) = -\inf_{x \in [a, b]} f(x)$. 设 $\alpha = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, 则 $-\alpha = \sup_{x \in [a, b]} (-f(x))$, 从而

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x) &= \sup_{x' \in [a, b]} f(x') + \sup_{x'' \in [a, b]} [-f(x'')] \\ &= \sup_{x', x'' \in [a, b]} [f(x') - f(x'')] = \sup_{x', x'' \in [a, b]} |f(x') - f(x'')|. \end{aligned}$$

【例 4-55】 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义且有界, 定义 $\omega_f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_f\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, 求证 $f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件为 $\omega_f(x_0) = 0$.

【证明】 必要性. 设 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall x \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, 有 $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. 于是 $\omega_f(x_0) < 2\varepsilon$. 由 ε 的任意性知, $\omega_f(x_0) = 0$.

充分性. 若 $\omega_f(x_0) = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \left\{ |f(x') - f(x'')| \mid x', x'' \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \right\} = 0.$$

故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $\forall n > N$ 有 $\sup_{x', x'' \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)} |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

成立, 从而, 取 $\delta = \frac{1}{N+1}$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 即 $f(x)$ 在 x_0 连续.

【例 4-56】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有连续的导函数, 求证

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

【证明】 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 由积分中值定理得, $\exists \xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

对上述 $\xi, \forall x \in [a, b]$,

$$f(x) = f(\xi) + \int_{\xi}^x f'(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx + \int_{\xi}^x f'(t) dt.$$

于是 $|f(x)| = \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx + \int_{\xi}^x f'(t) dt \right|$

$$\leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_{\xi}^x f'(t) dt \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

【例 4-57】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 求证存在连续函数序列 $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

【证明】 将 $[a, b]$ n 等分, 设分点为 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 令 $\varphi_n(x)$ 为过点 $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ 及 $[x_i, f(x_i)]$ 的直线, 即当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时, 令

$$\varphi_n(x) = f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} [f(x_i) - f(x_{i-1})],$$

则 $\varphi_n(x)$ 是 $[a, b]$ 的连续函数. 令 m_i , M_i 及 ω_i 分别表示函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的下确界、上确界及振幅. 则当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时, $m_i \leq \varphi_n(x) \leq M_i$, $m_i \leq f(x) \leq M_i$, 从而 $|\varphi_n(x) - f(x)| \leq \omega_i$. 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |\varphi_n(x) - f(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\varphi_n(x) - f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i. \end{aligned}$$

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积知, $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

【例 4-58】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 黎曼可积, 求证:

(1) 存在区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$ 使 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset (a, b)$, 且 $\omega_f([a_n, b_n]) < \frac{1}{n}$;

(2) 存在 $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 使得 $f(x)$ 在 c 点连续;

(3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有无穷多个连续点.

【证明】 (1) 首先证明 $\forall \epsilon > 0$, $\exists [\alpha, \beta] \subset (a, b)$, 使得 $\omega_f([\alpha, \beta]) < \epsilon$. 用反证法. 假设不然, 即 $\exists \epsilon_0 > 0$, $\forall [\alpha, \beta] \subset (a, b)$, 有 $\omega_f([\alpha, \beta]) \geq \epsilon_0$. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则对 $[a, b]$ 的任何分法 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $\lambda(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i| < \delta$ 时, 有 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon$.

与 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \geq \epsilon_0 \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i = (b-a)\epsilon_0$ 矛盾.

特别地, 取 $\epsilon_1 = 1$, 则 $\exists [a_1, b_1] \subset (a, b)$, 且 $b_1 - a_1 \leq \frac{b-a}{2}$, 使得

$\omega_f([a_1, b_1]) < 1$. 取 $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$, 则 $\exists [a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$, 且 $b_2 - a_2 \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$, 使得 $\omega_f([a_2, b_2]) < \frac{1}{2}$. 继续下去, 便得到一区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$, 使 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset (a, b)$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$, 且 $\omega_f([a_n, b_n]) < \frac{1}{n}$.

(2) 对 (1) 中构造出的区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 应用闭区间套定理得, $\exists c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 下面证 $f(x)$ 在 c 点连续. 事实上, $\forall \epsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 知, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $\frac{1}{n} < \epsilon$. 取 $\delta > 0$ 充分小, 使 $(c - \delta, c + \delta) \subset [a_{N+1}, b_{N+1}]$, 于是当 $|x - c| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(c)| < \omega_f([a_{N+1}, b_{N+1}]) < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

(3) $\forall t \in (a, b)$, $\forall \delta > 0$, 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, $f(x)$ 在 $[t - \delta, t + \delta] \cap [a, b]$ 可积. 由 (1) 和 (2) 可得, $\exists x_t \in [t - \delta, t + \delta] \cap [a, b] \subset [a, b]$, 使 $f(x)$ 在 x_t 处连续. 于是, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有无穷多个连续点.

第五章 多元函数微分学

§1 多元函数的极限与连续性

一、基本要求

1. 理解平面点集的有关概念和多元函数的概念.
2. 理解二元函数极限的概念, 掌握全面极限与累次极限的关系.
3. 理解二元函数的连续性, 理解有界闭区域上连续函数的性质(有界性定理、最值定理、一致连续性定理、介值定理).

二、主要概念和结论

1. 邻域 设点 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$, 称 $\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 | r(P, P_0) < \delta\}$ 为点 P_0 的 δ 邻域, 记为 $O(P_0, \delta)$; 称 $\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < r(P, P_0) < \delta\}$ 为点 P_0 的 δ 去心邻域, 记为 $O^*(P_0, \delta)$; 其中 $r(P, P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ 为点 $P(x, y)$ 与 $P_0(x_0, y_0)$ 之间的距离.

2. 利用邻域可给出平面上任一点 P_0 与点集 E 的关系.

(1) 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $O(P_0, \delta) \subset E$, 则称 P_0 为 E 的内点.

(2) 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $O(P_0, \delta) \cap E = \emptyset$, 则称 P_0 为 E 的外点.

(3) 若 $\forall \delta > 0$ 都有 $O(P_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$ 且 $O(P_0, \delta) \setminus E \neq \emptyset$, 则称 P_0 为 E 的边界点.

(4) 若 $\forall \delta > 0$ 都有 $O^*(P_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$, 则称 P_0 为 E 的聚点.

点 P_0 只能是 E 的内点、外点和边界点三者之一. E 的内点必属于 E , E 的外点必不属于 E , E 的边界点和聚点可能属于也可能不属于 E . E 的内点一定是 E 的聚点, E 的外点一定不是 E 的聚点, E 的边界点可能是也可能不是 E 的聚点.

3. 几种重要的平面点集 设 E 是平面点集.

(1) 若 E 中所有的点都是 E 的内点, 则称 E 为开集.

(2) 若 E 中所有的聚点(若有的话)都属于 E , 则称 E 为闭集.

(3) 若 E 中的任何两点都能用完全包含在 E 中的由有限条直线段组成的折线连结起来, 则称 E 为连通集.

(4) 连通的开集, 称为开区域, 简称区域.

(5) 区域连同它的边界点所组成的集合称为闭区域.

(6) 若 $\exists M > 0$, $P_0 \in \mathbb{R}^2$, 使得 $E \subset O(P_0, M)$, 则称 E 为有界集.

4. 设 $\{P_n(x_n, y_n)\}$ 是平面上的点列, $P_0 = (x_0, y_0)$ 是平面上的一点. 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, 有

$$r(P_n, P_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \epsilon,$$

则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0 , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ 或 $P_n \rightarrow P_0 (n \rightarrow \infty)$.

由点列极限的定义不难看出, 下面的三个式子是等价的:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} r(P_n, P_0) = 0.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

5. 设二元函数 $f(P)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个去心邻域有定义, A 是一个确定的实数. 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使当 $0 < r(P, P_0) < \delta$ 时, 有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$, 则称 A 是二元函数 $f(P)$ 当 $P \rightarrow P_0$ 时的极限. 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \text{ 或 } \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

上述极限通常称为二重极限. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 存在或 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在, 则称它们为二次极限或累次极限.

6. 设函数 f 在点 P_0 的某个邻域有定义. 若 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$, 则称 $f(P)$ 在点 P_0 连续.

关于二元函数极限的性质和运算法则, 二元连续函数的运算法则, 以及有界闭区域上连续函数的性质与一元函数的情况相似.

三、常用解题方法与典型例题

【例 5-1】 设 $\{P_n = (x_n, y_n)\}$ 是平面点列, $P_0 = (x_0, y_0)$ 是平面上的点. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ 的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

【证明】 必要性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, 有 $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \epsilon$, 即 $(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 < \epsilon^2$, 从而

$|x_n - x_0| < \varepsilon, |y_n - y_0| < \varepsilon$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

充分性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 同时有 $|x_n - x_0| < \varepsilon, |y_n - y_0| < \varepsilon$, 从而 $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \sqrt{2}\varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$.

【例 5-2】 设平面点列 $\{P_n\}$ 收敛, 证明 $\{P_n\}$ 有界.

【证明】 不妨设 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0 , 则对于 $\varepsilon_0 = 1, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $r(P_n, P_0) < \varepsilon_0 = 1$. 记 $r_i = r(P_i, P_0), i = 1, 2, \dots, N$. 令 $M = \max\{1, r_1, r_2, \dots, r_N\}$, 则 $\forall n$, 都有 $r(P_n, P_0) \leq M$, 所以 $\{P_n\}$ 有界.

【例 5-3】 判别下列平面点集哪些是开集、闭集、有界集或区域, 并分别指出它们的聚点:

(1) $E = \{(x, y) | y < x^2\}$;

(2) $E = \{(x, y) | xy \neq 0\}$;

(3) $E = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, 2y \leq x \leq 2y + 2\}$;

(4) $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1 \text{ 或 } y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$.

【解】 (1) E 为开集和区域, E 的聚点全体为 $\{(x, y) | y \leq x^2\}$.

(2) E 为开集, E 的聚点全体为 \mathbb{R}^2 .

(3) E 为闭集和有界集, E 的聚点全体为

$$\{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, 2y \leq x \leq 2y + 2\}.$$

(4) E 为闭集和有界集, E 的聚点全体为

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1 \text{ 或 } y = 0, 0 \leq x \leq 1\}.$$

【例 5-4】 设 F 是闭集, G 是开集, 证明: $F \setminus G$ 是闭集, $G \setminus F$ 是开集.

【证明】 设 \mathbb{R}^2 为全集, 记 F^c 和 G^c 分别是 F 和 G 的余集, F' 和 G' 分别是 F 和 G 的所有聚点组成的集合(该集合又称为导集), 则 $F' \subset F, G' \cap G = \emptyset$, 下面先证 F^c 为开集, G^c 是闭集:

(1) 设 $P_0 \in F^c$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $O(P_0, \delta) \subset F^c$. 这是因为: 假设 $\forall \delta > 0$, 都有 $O(P_0, \delta) \cap F \neq \emptyset$, 则 $P_0 \in F' \subset F$, 这和 $P_0 \in F^c$ 相矛盾, 所以 $O(P_0, \delta) \subset F^c$. 所以 F^c 为开集.

(2) 设 $P_0 \in (G^c)'$, 则 $\forall \delta > 0, O(P_0, \delta) \cap G^c \neq \emptyset$, 所以 $P_0 \in G$, 所以 $P_0 \in G^c$, 即 G^c 是闭集.

下面证明本题结论:

由于 $F \setminus G = F \cap G^c, G \setminus F = G \cap F^c$, 所以只需证明 $F \cap G^c$ 为闭集, $G \cap F^c$ 为开集即可.

(3) 记 $E = F \cap G^c$, 则 $E \subset F$ 且 $E \subset G^c$, 故 $E' \subset F'$ 且 $E' \subset (G^c)'$, 而 F 和 G^c 为闭集, 所以 $F' \subset F$ 且 $(G^c)' \subset G^c$, 即 $E = F' \cap (G^c)'$, 所以 $F \cap G^c$ 为闭集.

(4) 设 $M \in G \cap F^c$, 则 $M \in G$ 且 $M \in F^c$, 而 G 和 F^c 为开集, 故 $\exists \delta_1 > 0$, 使得 $O(M, \delta_1) \subset G$, $\exists \delta_2 > 0$, 使得 $O(M, \delta_2) \subset F^c$. 记 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $O(M, \delta) \subset G \cap F^c$, 即 $G \cap F^c$ 为开集.

【例 5-5】 设 F_1, F_2 是 R^2 中两个不相交闭集. 证明存在 R^2 上的连续函数 $f(X)$, 使

$$f(X) = 0, X \in F_1, f(X) = 1, X \in F_2.$$

【证明】 $\forall X \in R^2$, 令 $g(X) = \inf_{Y \in F_1} r(X, Y) = r(X, F_1)$,

$h(X) = \inf_{Y \in F_2} r(X, Y) = r(X, F_2)$. 由于 $F_1 \subset R^2$ 是闭集, 故 $g(X)$ 在 R^2 连续, 且 $\exists Y_X \in F_1$, 使 $g(X) = r(X, Y_X)$. 因此 $g(X)$ 满足 $X \in F_1, g(X) = 0, X \notin F_1, g(X) > 0$. 同理可证 $h(X)$ 在 R^2 连续且满足 $X \in F_2, h(X) = 0, X \notin F_2, h(X) > 0$. 令 $f(X) = \frac{g(X)}{g(X) + h(X)}$, 则 $f(X)$ 在 R^2 连续且满足 $X \in F_1, f(X) = 0, X \in F_2, f(X) = 1$.

【例 5-6】 设 E 是平面点集. 证明 P_0 是 E 的聚点的充要条件是 E 中存在点列 $\{P_n\}$, 满足 $P_n \neq P_0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$.

【证明】 必要性. 设 P_0 为 E 的聚点, 则 $\forall \delta > 0$, 有 $O^*(P_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$. 令 $\delta_n = \frac{1}{n}$, 则 $O^*(P_0, \delta_n) \cap E \neq \emptyset$, 任取一点 $P_n \in O^*(P_0, \delta_n) \cap E$, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$. 可以得到一点列 $\{P_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$.

充分性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$, 则 $\forall \delta > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N$, 有 $P_n \in O^*(P_0, \delta)$, 即 $O^*(P_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$, 所以 P_0 是 E 的聚点.

【例 5-7】 用平面上的有限覆盖定理证明致密性原理.

【证明】 用反证法. 假设有界点列 $\{P_n\}$ 没有收敛的子列, 则存在有界闭集 E , 使得 $\{P_n\} \subset E$, 但是 $\forall P \in E, \exists \delta_P > 0$, 使得 $O(P, \delta_P)$ 中只有 $\{P_n\}$ 中有限个点. 记 $\xi = \{O(P, \delta_P) | P \in E\}$, 则 ξ 是 E 的一个覆盖. 由有限覆盖定理, 存在 ξ 中有限个开集覆盖了 E , 设这有限个开集为:

$$G_1 = O(P'_1, \delta_1), G_2 = O(P'_2, \delta_2), \dots, G_K = O(P'_K, \delta_K),$$

则 $\bigcup_{i=1}^K G_i$ 必包含了 $\{P_n\}$ 中所有的点. 与每一个 G_i 中只包含了 $\{P_n\}$ 中的有限个点矛盾. 所以有界点列必有收敛的子列.

【例 5-8】 用致密性定理证明柯西收敛定理.

【证明】 必要性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n, m > N$ 时,

有 $r(P_n, P_0) < \frac{\epsilon}{2}, r(P_m, P_0) < \frac{\epsilon}{2}$, 所以

$$r(P_n, P_m) \leq r(P_n, P_0) + r(P_m, P_0) < \epsilon.$$

充分性. 取 $\epsilon_0 = 1, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $r(P_n, P_{N_1+1}) < 1$, 所以, 当 $n > N_1$ 时,

$$r(P_n, P_0) \leq r(P_n, P_{N_1+1}) + r(P_{N_1+1}, P_0) < 1 + r(P_{N_1+1}, P_0),$$

即 $\{P_n\}$ 有界. 由致密性定理可知 $\{P_n\}$ 有收敛的子列 $\{P_{n_k}\}$. 不妨设 $P_{n_k} \rightarrow P_0 (k \rightarrow \infty)$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+$, 当 $k > K$ 时, 有 $r(P_{n_k}, P_0) < \epsilon$. 取 $N_2 = \max\{N_1, K\}$, 则当 $m > N_2$ 时, 因为 $n_{N_2+1} > N_2 \geq N_1$, 且 $N_2 + 1 > K$, 所以 $r(P_m, P_0) \leq r(P_m, P_{n_{N_2+1}}) + r(P_{n_{N_2+1}}, P_0) < 2\epsilon$, 所以 $\{P_n\}$ 是收敛的.

【例 5-9】 设 E 是平面点集, 如果集合 E 的任一覆盖都有有限子覆盖, 则称 E 是紧集. 证明紧集是有界闭集.

【证明】 设 E 是紧集. 令 $\zeta = \{O(P, 1) | P \in E\}$, 则 ζ 是 E 的一个覆盖. 从而存在 ζ 中的有限个开集覆盖了 E , 不妨设这有限个开集为 $G_i = O(P_i, 1), P_i \in E, i = 1, 2, 3, \dots, K$, 则 $E \subset \bigcup_{i=1}^K G_i$. 由于每一个 G_i 有界, 所以 E 也是有界的. 设 $P_0 \in E$, 下面证 P_0 不是 E 的聚点. 设 $\zeta = \{O(P, \frac{1}{2}r(P_0, P)) | P \in E\}$, 则 ζ 覆盖了 E . 从而存在 ζ 中的有限个开集覆盖了 E , 不妨设这有限个开集为: $G_j = O(P_j, \frac{1}{2}r(P_0, P_j)), P_j \in E$, 其中 $j = 1, 2, 3, \dots, K$. 记 $\delta = \min_{1 \leq j \leq K} \left\{ \frac{1}{2}r(P_0, P_j) \right\}$, 则 $O(P_0, \delta) \cap (\bigcup_{j=1}^K G_j) = \emptyset$, 所以 $O(P_0, \delta) \cap E = \emptyset$, 即 P_0 不是 E 的聚点.

【例 5-10】 叙述下列定义:

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty;$ | (2) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} f(x, y) = A;$ |
| (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = A;$ | (4) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = \infty.$ |

【解】 (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty \Leftrightarrow \forall G > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta,$

$0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x, y)| > G$.

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists Z > 0$, 使当 $x > Z, y < -Z$ 时, 有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

(3) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists Y > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta, y > Y$ 时, 有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

(4) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = \infty \Leftrightarrow \forall G > 0, \exists \delta > 0, \exists Y > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta, y > Y$ 时, 有 $|f(x, y)| > G$.

【例 5.11】求下列极限(包括非正常极限):

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|};$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2};$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1};$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \sin \frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2);$$

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2};$$

$$(7) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)};$$

$$(8) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}.$$

【解】(1) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|, 0 \leq \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, 而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, 故原式 $= 0$.

(2) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$\text{原式} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) = 0.$$

$$(3) \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1} = \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{1 + x^2 + y^2} + 1)}{(1 + x^2 + y^2) - 1} = \sqrt{1 + x^2 + y^2} + 1,$$

$$\text{原式} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} + 1 = 2.$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) = 0, \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \text{有界, 故原式} = 0.$$

$$(5) x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2), \text{ 而 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0, \text{ 故原式} = 0.$$

(6) $0 \leq \frac{x^2 y^{\frac{1}{2}}}{x^4 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2 y \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 + y^2}{x^4 + y^2} \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}}$, 而 $\lim_{y \rightarrow 0} y^{\frac{1}{2}} = 0$, 故原式 $= 0$.

(7) 令 $t = x^2 + y^2$, 则原式 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = 0$.

(8) $0 \leq \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right|^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} = 0$, 故原式 $= 0$.

【例 5-12】 讨论下列函数在 $(0, 0)$ 点的全面极限和两个累次极限:

$$(1) f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2};$$

$$(2) f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y};$$

$$(3) f(x, y) = \frac{e^x - e^y}{\sin(xy)}.$$

【解】 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$.

令 $y = kx$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1}{1 + k^2}$, 即沿着不同斜率的直线趋于 $(0, 0)$ 的极限也不同; 从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 不存在. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) = 0$, 而 $\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ 是有界函数, 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \infty$. 令 $y = kx$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^x - e^y}{\sin(xy)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{kx}}{kx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - k^2 e^{kx}}{2k} = \frac{1 - k^2}{2k}$, 从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^x - e^y}{\sin(xy)}$ 不存在.

【例 5-13】 叙述并证明二元函数极限的局部有界性定理和局部保号性定理.

【证明】 (1) 局部有界性定理 若 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(P)$ 在 $O^*(P_0, \delta)$ 有界. 证明如下:

由 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$, 对于 $\epsilon_0 = 1$, $\exists \delta > 0$, 当 $P \in O^*(P_0, \delta)$ 时, 有 $|f(P) - A| < 1$, 即 $|f(P)| \leq |f(P) - A| + |A| < 1 + |A|$, 所以 $f(P)$ 在 $O^*(P_0, \delta)$ 有界.

(2) 局部保号性定理 若 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists \delta > 0$, 使得

$f(P)$ 在 $O^*(P_0, \delta)$ 有 $f(P) > \frac{A}{2}$ (或 $f(P) < \frac{A}{2}$). 证明如下:

由 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A > 0$, 对于 $\varepsilon_0 = \frac{A}{2} > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $P \in O^*(P_0, \delta)$ 时, 有

$|f(P) - A| < \frac{A}{2}$, 即 $f(P) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$. 类似可证 $A < 0$ 的情况.

【例 5-14】叙述并证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 存在的柯西收敛原理.

【证明】柯西收敛原理 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P', P'' \in O(P_0, \delta)$, 有 $|f(P') - f(P'')| < \varepsilon$. 证明如下:

必要性. 设 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $P', P'' \in O^*(P_0, \delta)$

时, 有 $|f(P') - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $|f(P'') - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 成立, 故

$$|f(P') - f(P'')| \leq |f(P') - f(P_0)| + |f(P'') - f(P_0)| < \varepsilon.$$

充分性. 在 f 的定义域内任取一收敛于 P_0 的点列 $\{P_n\}$, 且 $P_n \neq P_0, n = 1, 2, \dots$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $P_n \in O^*(P_0, \delta)$, 所以, $\forall n, m > N$, 有 $|f(P_n) - f(P_m)| < \varepsilon$. 由点列的柯西收敛原理知, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n)$ 存在. 再由 $\{P_n\}$ 的任意性可知, $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ 存在.

【例 5-15】讨论下列函数的连续范围:

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases};$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases};$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{(x^2 + y^2)^p}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad (p > 0).$$

【解】(1) 当 $x_0 \neq 0$ 时, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = x_0 \neq f(x_0, 0)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 =$

$f(0, 0)$, 故 $f(x, y)$ 的连续范围为 $\{(x, y) | x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 故 $f(x, y)$ 的连续范围为其定义域 \mathbb{R}^2 .

(3) 当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时, 连续范围为 R^2 ; 当 $p \geq \frac{1}{2}$ 时, 连续范围为 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 0\}$.

【例 5-16】 若 $f(x, y)$ 在某区域 G 内对变量 x 连续, 对变量 y 满足李普希兹条件, 即对 $\forall (x, y') \in G$ 和 $(x, y'') \in G$, 有 $|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L |y' - y''|$, 其中 L 为常数, 求证 $f(x, y)$ 在 G 内连续.

【证明】 $\forall (x_0, y_0) \in G$, 由 $f(x, y)$ 在 G 内对 x 连续, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta' > 0$, 当 $(x, y_0) \in G$, 且 $|x - x_0| < \delta'$ 时, 有 $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. 又 $f(x, y)$ 在 G 内对 y 满足李普希兹条件, 则 $\forall (x, y) \in G$ 和 $(x, y_0) \in G$, 当 $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2L}$ 时, 有 $|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq L |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$. 取 $\delta = \min\{\delta', \frac{\epsilon}{2L}\}$, 则 $\forall (x, y) \in G$, 当 $|x - x_0| < \delta$, 且 $|y - y_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$, 即 $f(x, y)$ 在 G 内连续.

【例 5-17】 证明有界闭集上二元连续函数的最值定理和一致连续性定理.

【证明】 (1) 最值定理: 若二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭集 E 连续, 则 $f(x, y)$ 在 E 能取到最大值和最小值. 证明如下:

因为 $f(x, y)$ 在 E 连续, 所以 $f(x, y)$ 在 E 有界. 由确界存在定理, $f(x, y)$ 在 E 有上确界和下确界, 分别记为 β 和 α . 下面证明 $f(x, y)$ 在 E 可以达到上确界 β 和下确界 α .

由上确界的定义, 对于 $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, $\exists P_n(x_n, y_n) \in E$, 使得 $\beta - \epsilon_n < f(P_n) \leq \beta$, 其中 $n = 1, 2, \dots$. 由此得到点列 $\{P_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \beta$. 由 E 有界, 知 $\{P_n\}$ 有界. 由致密性定理, $\{P_n\}$ 有收敛的子列, 不妨设 $\{P_n\}$ 收敛, 设 $P_n \rightarrow P_0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $P_0 \in E$. 再考虑到 $f(x, y)$ 在 E 连续, 故 $f(x, y)$ 在 P_0 点也连续, 所以 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$. 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P_0)$. 由极限的惟一性知, $\beta = f(P_0)$.

同理可证 $f(x, y)$ 在 E 可以达到下确界.

(2) 一致连续性定理: 若二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭集 E 连续, 则 $f(x, y)$ 在 E 一致连续. 证明如下:

用反证法. 假设 $f(x, y)$ 在 E 非一致连续, 则 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \eta > 0, \exists P'(x', y') \in E, P''(x'', y'') \in E, |x' - x''| < \eta, |y' - y''| < \eta,$

$|f(P') - f(P'')| \geq \varepsilon_0$. 特别, 取 $\eta_n = \frac{1}{n}$, 则得 $P'_n(x'_n, y'_n) \in E$ 和 $P''_n(x''_n, y''_n) \in E$, $|x'_n - x''_n| < \eta$, $|y'_n - y''_n| < \eta$, $|f(P'_n) - f(P''_n)| \geq \varepsilon_0$, 其中 $n = 1, 2, \dots$, 由此可以得到有界闭集 E 中的两个点列 $\{P'_n\}$ 和 $\{P''_n\}$. 由致密性定理, 有界点列 $\{P'_n\}$ 存在收敛的子列, 不妨设 $\{P'_n\}$ 收敛, 设 $P'_n \rightarrow P_0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $P_0 \in E$, 且 $P''_n \rightarrow P_0 (n \rightarrow \infty)$. 由于 $f(x, y)$ 在 E 连续, 所以 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P'_n) = f(P_0)$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P''_n) = f(P_0)$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(P'_n) - f(P''_n)] = 0$, 与 $|f(P'_n) - f(P''_n)| \geq \varepsilon_0 (n = 1, 2, \dots)$ 矛盾. 所以 $f(x, y)$ 在 E 一致连续.

【例 5-18】 设二元函数 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 连续, $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = A$, 求证:

(1) $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 有界; (2) $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 一致连续.

【证明】 (1) 由 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = A$ 知, 对于 $\varepsilon_0 = 1$, $\exists X > 0$, 当 $x^2 + y^2 > X$ 时, 有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon_0 = 1$, 从而 $|f(x, y)| < 1 + |A|$. 又 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 连续, 所以 $f(x, y)$ 在有界闭集 $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq X\}$ 连续, 由有界性定理知, $f(x, y)$ 在 E 有界, 即 $\exists M_0 > 0$, $\forall (x, y) \in E$, $|f(x, y)| \leq M_0$. 取 $M = \max\{M_0, 1 + |A|\}$, 则 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 都有 $|f(x, y)| \leq M$, 即 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 有界.

(2) 由 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = A$ 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x'^2 + y'^2 > X$, $x''^2 + y''^2 > X$ 时, 有 $|f(x', y') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'', y'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ 成立. 从而 $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq |f(x', y') - A| + |f(x'', y'') - A| < \varepsilon$. 又因为 $f(x, y)$ 在 $G = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq X + 1\}$ 连续, 所以 $f(x, y)$ 在 G 一致连续. 从而对上述 ε , $\exists \delta_0 > 0$, $\forall P_1, P_2 \in G$, 当 $r(P_1, P_2) < \delta_0$ 时, 有 $|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$. 取 $\delta = \min\{1, \delta_0\}$, 则 $\forall P_1 \in \mathbb{R}^2$ 和 $P_2 \in \mathbb{R}^2$, 当 $r(P_1, P_2) < \delta$ 时, 有 $|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$, 即 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 一致连续.

【例 5-19】 证明若 $f(x, y)$ 分别对每一变量 x 和 y 是连续的, 并且对其中的一个单调的, 则 $f(x, y)$ 是二元连续函数.

【证明】 不妨设 $f(x, y)$ 关于 x 单调. 任取 $(x_0, y_0) \in G$, 其中 G 为 $f(x, y)$ 的定义域. 由 $f(x, y)$ 关于 x 连续知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < 2\delta_1$ 时, 有 $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而 $|f(x_0 \pm \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 对于 $x = x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1$, 因为 $f(x, y)$

关于 y 连续, 所以对上述的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $|y - y_0| < \delta_2$ 时, 同时有

$$|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ 时, 利用 $f(x, y)$ 关于 x 的单调性, 有

$$\begin{aligned} & |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq \max\{|f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0, y_0)|, |f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0, y_0)|\} \\ & \leq |f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0)| + |f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

由 (x_0, y_0) 的任意性知, $f(x, y)$ 是连续函数.

【例 5.20】 证明若 E 是有界闭域, $f(x, y)$ 是 E 上的连续函数, 则 $f(E)$ 是闭区间.

【证明】 因为 $f(x, y)$ 在 E 连续, 所以 $f(x, y)$ 在 E 能达到最小值和最大值, 分别设为 $\alpha = f(P')$ 和 $\beta = f(P'')$, 其中 $P', P'' \in E$. 若 $\alpha = \beta$, 则 $f(E)$ 为一常数. 若 $\alpha \neq \beta$, 则 $\alpha < \beta$. 由介值定理, $\forall c \in (\alpha, \beta)$, $\exists P_0 \in E$, 使得 $f(P_0) = c$, 即 $f(x, y)$ 在 E 可以达到 $[\alpha, \beta]$ 之间的任意值, 所以 $f(E)$ 为闭区间.

§2 偏导数与全微分

一、基本要求

1. 理解二元函数偏导数和全微分的概念, 掌握二元函数连续、可微、偏导数存在、偏导数连续之间的关系.
2. 掌握多元复合函数偏导数、隐函数的偏导数的求法.
3. 理解方向导数和梯度的概念, 并掌握其计算方法.

二、主要概念和结论

1. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义, 若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称此极限值为函数 f 在点 (x_0, y_0) 关于 x 的偏导数或偏微商, 记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{或} \quad f_x(x_0, y_0);$$

类似地, 可定义 f 在点 (x_0, y_0) 关于 y 的偏导数 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$ 或 $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$ 或 $f_y(x_0, y_0)$.

和一元函数类似, 若函数 $z = f(x, y)$ 在区域 G 内每一个点处都存在对 x (或对 y) 的偏导数, 则这个偏导数也是定义在 G 的二元函数, 称为偏导函数, 简称偏导数, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ 或 } f_x(x, y) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ 或 } f_y(x, y) \right).$$

2. 高阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

若二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 G 连续, 则在 G 内有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3. 设函数 $u = f(x, y)$, $x = \varphi(s, t)$, $y = \Psi(s, t)$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \text{ (链式法则)}.$$

4. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域有定义. 若函数在点 P_0 的全增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 可以表示为

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho),$$

其中 A 和 B 与 Δx 和 Δy 无关, $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, 则称函数 f 在点 P_0 可微. 并称 $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ 为函数 f 在点 P_0 的全微分, 记为 $dz|_{P_0} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$.

5. 全微分、偏导数和连续之间的关系

(1) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微, 则 (I) 函数 f 在 $P_0(x_0, y_0)$ 点连续; (II) 函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 存在, 且在 $P_0(x_0, y_0)$ 点的全微分 $dz|_{P_0} = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$.

(2) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内存在偏导数, 且 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在点 P_0 连续, 则 f 在点 P_0 可微.

6. 方向导数与梯度



(1) 设三元函数 $f(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的某个邻域内有定义, l 为始于 P_0 点的任一条射线, $P(x, y, z) \in l$. 若 $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{r(P, P_0)}$ 存在, 则称该极限值为函数 f 在 P_0 点沿 l 方向的方向导数, 记作 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0}$ 或 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}$.

(2) 若函数 $f(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点可微, 则 f 在点 P_0 沿任何方向 l 的方向导数存在, 且有

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z} \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 l 的方向余弦.

(3) 设函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微, 则 f 在点 P_0 的梯度为 $\text{grad} f(x, y, z) = \{f_x, f_y, f_z\} \big|_{P_0}$. 梯度方向是函数在点 P_0 处函数值增长最快的方向.

三、常用解题方法与典型例题

【例 5-21】 求下列函数的偏导数:

(1) $u = xye^{\sin(xy)}$; (2) $u = x^y + y^x$.

【解】 (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{\sin(xy)}[1 + xy\cos(xy)]$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{\sin(xy)}[1 + xycos(xy)]$.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \ln y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x + xy^{x-1}$.

【例 5-22】 设 $f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 考察函数在 $(0, 0)$

点的偏导数.

【解】 $f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$;

$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y \sin \frac{1}{\Delta y^2}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta y^2}$ 不存在, 所以

$f_y(0, 0)$ 不存在.

【例 5-23】 证明函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 点连续但偏导数不存在.

【证明】 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = u(0, 0)$ 知, u 在 $(0, 0)$ 点连续. 因为

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x}$ 不存在, 所以 $u_x(0, 0)$ 不存在. 同理, $u_y(0, 0)$ 也不存在.

【例 5-24】 考察函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的可微性, 其中

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

【证明】 $f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. 由全微分的定义知, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微 $\Leftrightarrow f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - [f_x(0, 0) \cdot \Delta x + f_y(0, 0) \cdot \Delta y]$ 是 ρ 的高阶无穷小. 而

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - [f_x(0, 0) \cdot \Delta x + f_y(0, 0) \cdot \Delta y]}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x \Delta y \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\rho} = 0, \end{aligned}$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微.

【例 5-25】 证明函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 点连续且

偏导数存在, 但在此点不可微.

【证明】 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = 0 = f(0, 0)$, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续.

$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$, 同理, $f_y(0, 0) = 0$.

$f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - [f_x(0, 0) \cdot \Delta x + f_y(0, 0) \cdot \Delta y] = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. 令 $\Delta y = k \Delta x$, 则 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} / \rho \right) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k \Delta x^3}{(1 + k^2)^{\frac{3}{2}} \Delta x^3} = \frac{k}{(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$, 所以 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} / \rho \right)$ 不存在, 故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微.

【例 5-26】 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

的偏导数存在, 但偏导数在 $(0, 0)$ 点不连续, 在 $(0, 0)$ 点的任何邻域中无界, 而 f 在 $(0, 0)$ 点可微.

【证明】 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$;

$$f_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2};$$

当 $x^2 + y^2 = 0$ 时, $f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$; 同理 $f_y(0, 0) = 0$. 故

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

构造一点列 $\left\{ P_n \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0 \right) \right\}$, 则 $\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $r(P_n, O) < \delta$, 且 $\lim_{P_n \rightarrow O} f_x(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_x \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0 \right) = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n\pi} = -\infty$, 故 $f_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的任何邻域中无界. 同理, $f_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的任何邻域中也无界. 当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 的极限不存在, 从而 $f(x, y)$ 的偏导数在 $(0, 0)$ 点不连续.

$$\text{由 } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0, \text{ 知}$$

$f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微, 且 $df|_{(0,0)} = 0dx + 0dy = 0$.

注 此例表明, 对各变量的偏导数存在且连续是可微的充分条件, 而不是充要条件.

【例 5-27】 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$. 证明 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$

连续.

【证明】 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $f_x(x, y) = \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x \cdot x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$, 而 $f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$. 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f_x(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^5 \cos \theta \sin^4 \theta}{r^4} = 0 = f_x(0, 0)$, 故 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 $(0, 0)$ 连续. 同理可证, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 也连续.

【例 5-28】 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

(1) $x = x(t)$, $y = y(t)$ 是通过原点的任意可微曲线 (即 $x^2(0) + y^2(0) = 0$; $t \neq 0$ 时, $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$, $x(t)$, $y(t)$ 可微). 求证 $f(x(t), y(t))$ 可微.

(2) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不可微.

【证明】 (1) 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2 y^2 + 4x^4}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$, 由链式法则, 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f(x(t), y(t))$ 可微, 且

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{3x^2 y^2 + 4x^4}{(x^2 + y^2)^2} \cdot x'(t) + \frac{-2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} y'(t).$$

当 $x^2 + y^2 = 0$ 时, 令 $g(t) = f(x(t), y(t)) = \begin{cases} \frac{x^3(t)}{x^2(t) + y^2(t)}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

由于 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = x'(0)$, 所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{x^3(t)}{x^2(t) + y^2(t)} / t \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t)}{t} \cdot \frac{x^2(t)/t^2}{x^2(t)/t^2 + y^2(t)/t^2} = \frac{x'^3(0)}{x'^2(0) + y'^2(0)}. \end{aligned}$$

所以 $f(x(t), y(t))$ 在所有点都可微.

(2) 因为 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\rho}$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{-\Delta x \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}^3}$$

不存在, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不可微.

【例 5-29】 设 $|x|$, $|y|$ 很小, 利用全微分推出 $(1+x)^m(1+y)^n$ 的近似公式.

【解】 设 $f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n$, 则 $f_x(x, 0) = m(1+x)^{m-1}$, $f_x(0, 0) = m$, $f_y(0, y) = n(1+y)^{n-1}$, $f_y(0, 0) = n$, 所以

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + f_x(0, 0) \cdot x + f_y(0, 0) \cdot y = 1 + mx + ny.$$

【例 5-30】 设 $u = f(x, y)$ 在矩形: $a < x < b$, $c < y < d$ 内可微, 且全微分 du 恒为零, 问 $f(x, y)$ 在该矩形内是否应该取常数? 证明你的结论.

【解】 是. 因为 $du = 0$, 所以 $du = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = 0$, 即 $f_x(x, y) = 0$, $f_y(x, y) = 0$, 而由 $f_x(x, y) = 0 \Rightarrow f(x, y) = g(y)$, $f_y(x, y) = 0 \Rightarrow g'(y) = 0$, 从而, $g(y) = C$, 所以 $f(x, y) = C$ (常数).

【例 5-31】 求下列函数指定阶的偏导数:

(1) $u = xyz e^{x+y+z}$, 求 $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$;

(2) $u = \frac{x+y}{x-y}$ ($x \neq y$), 求 $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$.

【解】 (1) $u = xyz e^{x+y+z} = (xe^x)(ye^y)(ze^z)$, 而 $(te^t)^{(k)} = (t+k)e^t$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} &= (x+p)e^x \cdot (y+q)e^y \cdot (z+r)e^z \\ &= (x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}. \end{aligned}$$

(2) $u = \frac{x+y}{x-y} = 1 + \frac{2y}{x-y}$, 而 $\left(\frac{1}{t}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)}{t^k}$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} &= \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left(1 + \frac{2y}{x-y} \right) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(2y \frac{(-1)^m \cdot m!}{(x-y)^{m+1}} \right) \\ &= C_n^0 (2y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(\frac{(-1)^m \cdot m!}{(x-y)^{m+1}} \right) + C_n^1 \cdot 2 \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \left(\frac{(-1)^m \cdot m!}{(x-y)^{m+1}} \right) \\ &= 2(-1)^m m! \cdot y \left(\frac{(m+1)(m+2) \cdots (m+n)}{(x-y)^{m+n+1}} \right) + \\ &\quad 2(-1)^m n \cdot m! \left(\frac{(m+1)(m+2) \cdots (m+n-1)}{(x-y)^{m+n}} \right) \\ &= \frac{2(-1)^m (m+n-1)! (my + nx)}{(x-y)^{m+n+1}}. \end{aligned}$$

【例 5-32】 验证函数 $u = \ln(x^2 + y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

【证明】 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

【例 5-33】 设函数 $u = \varphi(x + \phi(y))$, 证明 $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【证明】 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x + \phi(y))$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \phi'(y) \varphi''(x + \phi(y))$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x + \phi(y)) \phi'(y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x + \phi(y))$, 所以,

$$\text{左端} = \varphi'(x + \phi(y)) \phi'(y) \varphi''(x + \phi(y)) = \text{右端}.$$

【例 5-34】 求下列函数的所有二阶偏导数:

$$(1) u = f(x + y, x - y); \quad (2) u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

$$\text{【解】} (1) \frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + f_2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 - f_2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11} + f_{12} + f_{21} + f_{22},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{11} - f_{12} - f_{21} + f_{22}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11} - f_{12} + f_{21} - f_{22}.$$

$$(2) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_1 + \frac{1}{z} f_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} f_2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2} f_{11},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} f_1 + \frac{x^2}{y^4} f_{11} - \frac{x}{y^2 z} f_{12} - \frac{x}{zy^2} f_{21} + \frac{1}{z^2} f_{22},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2y}{z^3} f_2 + \frac{y^2}{z^4} f_{22}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} f_1 - \frac{x}{y^3} f_{11} + \frac{1}{yz} f_{12}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{z^2} f_{12},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = +\frac{x}{yz^2} f_{12} - \frac{1}{z^2} f_2 - \frac{y}{z^3} f_{22}.$$

【例 5-35】 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 f 是可微函数, 验证 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} =$

$$\text{【解】} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2xyf'}{f^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f + 2y^2 f'}{f^2}.$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{-2xyf'}{f^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{f + 2y^2 f'}{f^2} = \frac{1}{yf} = \frac{z}{y^2}.$$

【例 5-36】 设 $v = \frac{1}{r} g\left(t - \frac{r}{c}\right)$, c 为常数, 函数二阶可导, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 证明 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$.

$$\text{【解】} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{r} g'', \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} g - \frac{x}{cr^2} g',$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}g + \frac{3x^2 - r^2}{cr^4}g' + \frac{x^2}{c^2 r^3}g'',$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}g + \frac{3y^2 - r^2}{cr^4}g' + \frac{y^2}{c^2 r^3}g'',$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}g + \frac{3z^2 - r^2}{cr^4}g' + \frac{z^2}{c^2 r^3}g'',$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{3r^2 - 3r^2}{r^5}g + \frac{3r^2 - 3r^2}{cr^4}g' + \frac{r^2}{c^2 r^3}g'' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

【例 5.37】 若函数 $f(x, y, z)$ 对任一正实数 t 满足关系 $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$, 则称 $f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数. 设 $f(x, y, z)$ 可微, 试证明 $f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数的充要条件是

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f(x, y, z).$$

【证明】 必要性. 对 $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$ 两边关于 t 求导, 得 $xf'_1(tx, ty, tz) + yf'_2(tx, ty, tz) + zf'_3(tx, ty, tz) = nt^{n-1}f(x, y, z)$, 两边乘以 t , 得

$$txf'_1(tx, ty, tz) + tyf'_2(tx, ty, tz) + tzf'_3(tx, ty, tz) = nt^n f(x, y, z) = n f(tx, ty, tz),$$

即

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f(x, y, z).$$

充分性. 当 $t \neq 0$ 时, 构造函数 $F(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}$. 易知

$$F'(t) = \frac{1}{t^n}(xf'_1 + yf'_2 + zf'_3) - \frac{n}{t^{n+1}}f = \frac{1}{t^{n+1}}(txf'_1 + tyf'_2 + tzf'_3 - nf) = 0.$$

故 $F(t) = C$ (常数). 又 $F(1) = f(x, y, z) = C$, 故

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z).$$

由已知 $f(0, 0, 0) = 0$, 所以当 $t = 0$ 时结论成立.

【例 5.38】 验证下列各式:

$$(1) u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y), \text{ 则 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$(2) u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\psi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ 则 } x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{【解】 } (1) \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi + x\varphi' + y\psi', \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \varphi' + x\varphi'' + \psi' + y\psi'', \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$2\varphi' + x\varphi'' + y\psi'', \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\psi' + y\psi'' + x\varphi'', \text{ 故 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\varphi' + x\varphi'' + y\psi'' - 2\varphi' - 2x\varphi'' - 2\psi' - 2y\psi'' + 2\psi' + y\psi'' + x\varphi'' = 0.$$

$$(2) \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi + x\varphi' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \Psi' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \varphi - \frac{y}{x^2}(x\varphi' + \Psi'),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3}\varphi'' + \frac{2y}{x^3}\Psi' + \frac{y^2}{x^4}\Psi'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}\Psi' - \frac{y}{x^2}\varphi' - \frac{y}{x^3}\Psi'', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi' +$$

$$\frac{1}{x}\Psi', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\Psi'' + \frac{1}{x}\varphi'',$$

$$\text{故 } x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^3}\varphi'' + \frac{2y}{x^3}\Psi' + \frac{y^2}{x^4}\Psi'' - 2xy \left(\frac{1}{x^2}\Psi' + \frac{y}{x^2}\varphi' + \frac{y}{x^3}\Psi''\right) + \frac{1}{x^2}\Psi'' + \frac{1}{x}\varphi'' = 0.$$

【例 5.39】 设 $u = f(x, y)$ 可微, 在极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 下证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

【证明】 $\frac{\partial u}{\partial r} = f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta,$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = rf_y \cos \theta - rf_x \sin \theta, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f_{xx} \cos^2 \theta + f_{yy} \sin^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2 f_{xx} \sin^2 \theta - 2rf_{xy} \sin \theta \cos \theta + r^2 f_{yy} \cos^2 \theta - rf_x \cos \theta - rf_y \sin \theta.$$

故

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = f_x^2 \cos^2 \theta + 2f_x f_y \cos \theta \sin \theta + f_y^2 \sin^2 \theta +$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2 f_y^2 \cos^2 \theta - 2rf_x f_y \cos \theta \sin \theta + r^2 f_x^2 \sin^2 \theta)$$

$$= f_x^2 + f_y^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = f_{xx} \cos^2 \theta + f_{yy} \sin^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta +$$

$$\frac{1}{r}(rf_y \cos \theta - rf_x \sin \theta) + \frac{1}{r^2}(r^2 f_{xx} \sin^2 \theta -$$

$$2rf_{xy} \sin \theta \cos \theta + r^2 f_{yy} \cos^2 \theta - rf_x \cos \theta - rf_y \sin \theta)$$

$$= f_{xx} + f_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

【例 5.40】 设 $z = f(x, y)$ 可微, 在坐标旋转变换 $x = u \cos \theta - v \sin \theta$, $y =$

$u \sin \theta + v \cos \theta$ 下 (其中旋转角 θ 为常数), 证明: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$. 这时称 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ 是一个形式不变量.

【证明】 $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta$, 故

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}$$

【例 5.41】 设函数 $u = f(x, y)$ 满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 证明在下列变换下保持不变, 即仍有 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

(1) $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$;

(2) $x = \varphi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$ 满足 $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}$, 这组方程称为柯西-黎曼方程.

【证明】 (1) $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} e^s \cos t + \frac{\partial u}{\partial y} e^s \sin t$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{2s} \cos^2 t + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e^{2s} \sin 2t + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{2s} \sin^2 t + \frac{\partial u}{\partial x} e^s \cos t + \frac{\partial u}{\partial y} e^s \sin t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} e^s (-\sin t) + \frac{\partial u}{\partial y} e^s \cos t,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{2s} \sin^2 t + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e^{2s} \sin 2t + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{2s} \cos^2 t + \frac{\partial u}{\partial x} e^s (-\sin t) - \\ &\quad \frac{\partial u}{\partial y} e^s \cos t, \end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \\ &\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} +$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \\ &\quad \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right] + \\ &\quad \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

【例 5-42】 作自变量的变换, 取 ξ, η, ζ 为新的自变量:

$$(1) \xi = x, \eta = x^2 + y^2, \text{ 变换方程 } y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$(2) \xi = x, \eta = y - x, \zeta = z - x, \text{ 变换方程 } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

【解】 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial \eta}$, 代入原方程, 得

$$y \frac{\partial z}{\partial \xi} + 2xy \frac{\partial z}{\partial \eta} - 2xy \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0, \quad \text{即 } \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0.$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \text{ 故变换后的方程为 } \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \end{aligned}$$

【例 5-43】 设 $u = \frac{x}{y}, v = x, w = xz - y$, 变换方程 $y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$. 其中 u, v 为新的自变量, $w = w(u, v)$ 为新的因变量.

$$\begin{aligned} \text{【解】 对 } w = xz - y \text{ 两边关于 } y \text{ 求导, 其中 } w = w(u, v), \text{ 得 } \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} &= x \frac{\partial z}{\partial y} - 1. \text{ 由 } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ 知, } \frac{\partial w}{\partial u} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = x \frac{\partial z}{\partial y} - 1, \text{ 从而 } \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u}. \end{aligned}$$

再对 $\frac{\partial w}{\partial u} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = x \frac{\partial z}{\partial y} - 1$ 两边关于 y 求导, 得

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(-\frac{x}{y^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{2x}{y^3} = x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3} \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{x}{y^4} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2},$$

$$\text{故 } y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}, \text{ 即 } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0.$$

【例 5-44】 求由方程 $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的一阶和二阶偏导数.

【解】 方程两边分别对 x 和 y 求偏导, 得

$$-ye^{-xy} - 2\frac{\partial z}{\partial x} + e^z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad -xe^{-xy} - 2\frac{\partial z}{\partial y} + e^z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}.$$

将所得的第一个方程两边再分别对 x 和 y 求偏导, 得

$$y^2e^{-xy} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + e^z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$-e^{-xy} + xye^{-xy} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + e^z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2e^{-xy}(e^{2z} - 4e^z + e^{z-xy} + 4)}{-(e^z - 2)^3},$$

解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^{-xy}(1 - xy)(e^z - 2)^2 - xye^{z-2xy}}{(e^z - 2)^3}.$$

将所得的第二个方程两边再对 y 求导, 得

$$x^2e^{-xy} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e^z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + e^z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

解得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2e^{-xy}(e^{2z} - 4e^z + e^{z-xy} + 4)}{-(e^z - 2)^3}.$$

【例 5-45】 求下列方程所确定的全微分 dz :

(1) $z = f(xz, z - y)$; (2) $f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

【解】 (1) 两边分别对 x 和 y 求偏导得,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x}\right) f_1 + \frac{\partial z}{\partial x} f_2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial y} f_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right) f_2.$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zf_1}{1 - xf_1 - f_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-f_2}{1 - xf_1 - f_2}.$$
 故

$$dz = \frac{zf_1 dx - f_2 dy}{1 - xf_1 - f_2}.$$

(2) 两边对 x 求偏导得, $f_1 \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + f_2 \left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_1 + 2xf_2}{f_1 + 2zf_2}$. 同理, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_1 + 2yf_2}{f_1 + 2zf_2}$. 故

$$dz = \frac{f_1 \cdot (dx + dy) + 2f_2 \cdot (xdx + ydy)}{f_1 + 2zf_2}.$$

【例 5-46】 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定, 其中

f 为可导函数. 证明 $(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.

【证明】对 $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 两边分别关于 x 和 y 求偏导得, $2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} f'$, $2y + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = f + y \left(\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} \right) f'$. 解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{f' - 2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - f + \frac{z}{y} f'}{f' - 2z}$. 再由 $f = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}$, 代入方程中,

$$\text{左边} = (x^2 - y^2 - z^2) \frac{2x}{f' - 2z} + 2xy \frac{2y - f + \frac{z}{y} f'}{f' - 2z} = \frac{2xz f' - 4xz^2}{f' - 2z} = 2xz = \text{右边}.$$

【例 5-47】设 $z = x^2 + y^2$, 其中 $y = f(x)$ 为由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dz}{dx}$ 和 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

【解】对 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 两边关于 x 求导, 得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x - y}{x - 2y}.$$

再对 $2x - y - xy' + 2yy' = 0$ 两边关于 x 求导, 得

$$2 - y' - y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0 \Rightarrow y'' = \frac{2y' - 2y'^2 - 2}{2y - x} = \frac{-6}{(2y - x)^3}.$$

对 $z = x^2 + y^2$ 两边关于 x 求导, 得

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2yy' = 2x + 2y \frac{2x - y}{x - 2y},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2 + 2y'^2 + 2yy'' = \frac{10x^3 - 18x^2y + 24xy^2 - 8y^3}{(x - 2y)^3}.$$

【例 5-48】求方程组 $\begin{cases} u = xyz \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ 所确定的函数的偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

【解】对 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 两边关于 x 求偏导, 得 $x + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, 即 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$. 同理, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$. 对 $x + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ 两边分别关于 x 和 y 求偏导得,

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

解得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}$. 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz^2 - x^2z}{z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^3 y + 3xy z^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z + y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z^2 - y^2 z^2 - x^2 z^2 - x^2 y^2}{z^3}.$$

【例 5-49】 已知方程组 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$ 定义了 z 为 x, y 的函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 方程 $x = u + v$ 和 $y = u^2 + v^2$ 两边对 x 求导, 得

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x}.$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v}.$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = -3uv.$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3(u+v)}{2}.$$

§ 3 隐函数存在定理及其应用

一、基本要求

1. 理解由一个方程或方程组所确定的隐函数(组)的存在性定理(存在性、连续性、可微性)及证明思路.
2. 会用定理证明由一个方程或方程(组)所确定的隐函数(组)的存在性, 会求隐函数、反函数组的偏导数.

二、主要概念和结论

1. 设函数 $F(x, y)$ 满足条件: ① F_x, F_y 在区域 $D: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 内连续; ② $F(x_0, y_0) = 0$; ③ $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. 则① 在 $P_0(x_0, y_0)$ 点的某邻域内, $F(x, y) = 0$ 惟一确定一个定义在 x_0 点的某个邻域 $O(x_0, \delta)$ 内的函数 $y = y(x)$, 满足 $y_0 = f(x_0)$; ② $y = y(x)$ 在 $O(x_0, \delta)$ 内连续; ③ $y = y(x)$ 在 $O(x_0, \delta)$ 内具有连续的导数, 且

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

上述结论可推广到多元隐函数的情形.

2. 设函数 $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 满足: ① 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某个邻域 U 内, 对各变元有一阶连续偏导数; ② $F(P_0) = 0, G(P_0) = 0$ (初始条件); ③ $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \Big|_{P_0} \neq 0$. 则① 在点 P_0

的某邻域内, 由方程组 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 唯一地确定一组函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y) ((x, y) \in D)$ 满足 $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$; ② $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 在 D 内连续; ③ $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 在 D 内具有连续的偏导数, 且

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}. \end{aligned}$$

上述结论可推广到多个变量、多个方程的情形.

三、常用解题方法与典型例题

【例 5-50】 方程 $x^2 + y + \sin(xy) = 0$ 在原点附近能否用形如 $y = f(x)$ 的方程表示? 又能否用形如 $x = g(y)$ 的方程表示?

【解】 令 $F(x, y) = x^2 + y + \sin(xy)$, 则 $F_x = 2x + y\cos(xy), F_y = 1 + x\cos(xy)$, 它们都在 \mathbb{R}^2 连续, 而 $F(0, 0) = 0, F_x(0, 0) = 0, F_y(0, 0) = 1 \neq 0$, 故方程在 $(0, 0)$ 点附近可惟一确定有连续导数的函数 $y = f(x)$, 但是无法断定能否在 $(0, 0)$ 的附近确定函数 $x = g(y)$.

【例 5-51】 方程 $F(x, y) = y^2 - x^2(1 - x^2) = 0$ 在哪些点的附近可惟一地确定单值、连续且有连续导数的函数 $y = f(x)$?

【解】 由于 $F(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 连续, 且 $F'_x = 4x^3 - 2x$ 和 $F'_y = 2y$ 也在 \mathbb{R}^2 连续, 当 $y \neq 0$ 时, $F'_y \neq 0$. 所以在 \mathbb{R}^2 任意满足方程 $F(x, y) = y^2 - x^2(1 - x^2) = 0$ 且 $y \neq 0$ 的点 (x, y) 的某一邻域内, 由方程都能惟一确定单值、连续且有连续导数的函数 $y = f(x)$. 由 $y \neq 0$, 得 $x^2(1 - x^2) \neq 0$, 即 $x \neq 0$ 且 $x \neq \pm 1$, 所以在 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 范围内方程能惟一确定有连续导数的单值函数 $y = f(x)$.

【例 5-52】 方程 $xy + z \ln y + e^{xz} = 1$ 在点 $P_0(0, 1, 1)$ 的某邻域内能否确定出某一个变量是另外两个变量的函数?

【解】 令 $F(x, y, z) = xy + z \ln y + e^{xz} - 1$, 则 $F(P_0) = 0$, $F_x(P_0) = y + ze^{xz}|_{P_0} \neq 0$, $F_y(P_0) = x + \frac{z}{y}|_{P_0} \neq 0$, $F_z(P_0) = \ln y + xe^{xz}|_{P_0} = 0$, 故能惟一确定 $x = f(y, z)$ 和 $y = g(x, z)$, 但不能断定能否确定 $z = h(x, y)$.

【例 5.53】 设 f 是一元函数, 试问 f 应满足什么条件, 方程

$$2f(xy) = f(x) + f(y)$$

在点 $(1, 1)$ 的邻域内能确定出惟一的 y 为 x 的函数?

【解】 令 $F(x, y) = f(x) + f(y) - 2f(xy)$, 显然 $F(1, 1) = 0$. 若① F_x, F_y 在点 $(1, 1)$ 的邻域内连续; ② $F_y|_{(1,1)} = f'(1) - 2f'(1) = -f'(1) \neq 0$, 则方程 $2f(xy) = f(x) + f(y)$ 在点 $(1, 1)$ 的邻域内能确定惟一的 y 为 x 的函数. 而上述的条件等价于: ① $f(x)$ 在 $x=1$ 的邻域内连续, 在 $x=1$ 处可导, ② $f'(1) \neq 0$.

【例 5.54】 设有方程 $x = y + \varphi(y)$, 其中 $\varphi(0) = 0$, 且当 $-a < y < a$ 时, $|\varphi'(y)| \leq k < 1$. 证明存在 $\delta > 0$, 当 $-\delta < x < \delta$ 时, 存在惟一的可微函数 $y = y(x)$ 满足方程 $x = y + \varphi(y)$ 且 $y(0) = 0$.

【解】 令 $F(x, y) = x - y - \varphi(y)$, 则 $F(0, 0) = 0$, $F_x = 1$, $F_y = -1 - \varphi'(y) \neq 0$. 故 $\exists \delta > 0$, 当 $-\delta < x < \delta$, $-\delta < y < \delta$ 时可惟一确定可微函数 $y = y(x)$ 且 $y(0) = 0$.

【例 5.55】 讨论方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

在点 $P_0(1, -1, 2)$ 的附近能否确定形如 $x = f(z)$, $y = g(z)$ 的隐函数组.

【解】 记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2$, $G(x, y, z) = x + y + z - 2$. 则 F 和 G 满足: ① 在点 P_0 的某个邻域 U 内有对各个变元的一阶连续偏导数(事实上在 R^3 都有对各个变量的一阶连续偏导数); ② $F(P_0) = 0$, $G(P_0) = 0$;

③ $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}|_{P_0} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}|_{P_0} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, 所以方程组在点 P_0

的附近能确定隐函数组 $x = f(z)$, $y = g(z)$.

【例 5.56】 求下列函数组的反函数的偏导数:

(1) 设 $u = x \cos \frac{y}{x}$, $v = x \sin \frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$;

(2) 设 $u = e^x + x \sin y$, $v = e^x - x \cos y$, 求 $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

$$\text{【解】 (1) } J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} & -\sin \frac{y}{x} \\ \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} & \cos \frac{y}{x} \end{vmatrix} = 1,$$

则

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y} = \cos \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial y} = \sin \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}.$$

$$(2) J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} e^x + \sin y & x \cos y \\ e^x - \cos y & x \sin y \end{vmatrix} = x e^x (\sin y - \cos y) + x,$$

则

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x \sin y}{x e^x (\sin y - \cos y) + x},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x \cos y}{x e^x (\sin y - \cos y) + x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e^x - \cos y}{x e^x (\sin y - \cos y) + x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^x + \sin y}{x e^x (\sin y - \cos y) + x}.$$

【例 5-57】 设 $u = \frac{x}{r^2}$, $v = \frac{y}{r^2}$, $w = \frac{z}{r^2}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(1) 试求以 u, v, w 为自变量的反函数;

(2) 计算 $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$.

$$\text{【解】 (1) } u^2 + v^2 + w^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^4} = \frac{1}{r^2},$$

$$x = u \cdot r^2 = \frac{u}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad y = v \cdot r^2 = \frac{v}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$z = w \cdot r^2 = \frac{w}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

$$(2) \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{r^2 - 2x^2}{r^4} & \frac{-2xy}{r^4} & \frac{-2xz}{r^4} \\ \frac{-2xy}{r^4} & \frac{r^2 - 2y^2}{r^4} & \frac{-2yz}{r^4} \\ \frac{-2xz}{r^4} & \frac{-2yz}{r^4} & \frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{r^6}.$$

【例 5-58】 设 f_i, φ_i 连续可微, 且

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

求 $\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} f'_1 \varphi'_1 & f'_1 \varphi'_2 & \dots & f'_1 \varphi'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_n \varphi'_1 & f'_n \varphi'_2 & \dots & f'_n \varphi'_n \end{vmatrix} \\ &= f'_1 f'_2 \dots f'_n \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \dots & \varphi'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \dots & \varphi'_n \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

【例 5-59】 据理说明在点 $(0, 1)$ 附近是否在连续可微函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 满足 $f(0, 1)=1$, $g(0, 1)=-1$, 且 $[f(x, y)]^3 + xg(x, y) - y = 0$, $[g(x, y)]^3 + yf(x, y) - x = 0$.

【解】 考察方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = u^3 + xv - y = 0 \\ G(x, y, u, v) = v^3 + yu - x = 0 \end{cases}$$

记 P_0 为 $(0, 1, 1, -1)$, 则 $F(P_0) = G(P_0) = 0$, F 和 G 在 $(0, 1, 1, -1)$ 的任何邻域有连续偏导数, 且

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} 3u^2 & x \\ y & 3v^2 \end{vmatrix} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

所以方程组可以在 $(0, 1, 1, -1)$ 点的任何邻域内惟一确定隐函数组 $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, 它们定义在 $(0, 1)$ 的附近, $f(0, 1)=1$, $g(0, 1)=-1$, 且 $[f(x, y)]^3 + xg(x, y) - y = 0$, $[g(x, y)]^3 + yf(x, y) - x = 0$.

【例 5-60】 设

$$\begin{cases} u = f(x, y, z, t) \\ g(y, z, t) = 0 \\ h(x, t) = 0 \end{cases}$$

问在什么条件下 u 是 x, y 的函数? 并求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

【解】 当 g 和 h 对 z, t 有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \neq 0$ 时可以惟一确

定隐函数组: $z = z(y)$, $t = t(y)$, 代入 f 中得 $u = f(x, y, z(y), t(y))$, 从而可以确定 u 是 x, y 的函数.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dy}.$$

再由 $\begin{cases} g(y, z(y), t(y)) = 0 \\ h(z(y), t(y)) = 0 \end{cases}$, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{dt}{dy} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dt}{dy} = 0 \end{cases}$$

解得
$$\frac{dz}{dy} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}}, \quad \frac{dt}{dy} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z}}{\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}}.$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{\partial(h, f)}{\partial(z, t)} / \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \right).$$

【例 5-61】 设 $z = z(x, y)$ 满足方程组 $\begin{cases} f(x, y, z, t) = 0 \\ g(x, y, z, t) = 0 \end{cases}$, 求 dz .

【解】 当 $\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)} \neq 0$ 时, 存在隐函数 $z = z(x, y)$, $t = t(x, y)$. 代入 f, g 中, 得

$$\begin{cases} f(x, y, z(x, y), t(x, y)) = 0 \\ g(x, y, z(x, y), t(x, y)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(t, x)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(t, y)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}}.$$

所以
$$dz = \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(t, x)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}} dx + \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(t, y)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}} dy.$$

【例 5-62】 设 (x_0, y_0, z_0, u_0) 满足方程组

$$\begin{cases} f(x) + f(y) + f(z) = F(u) \\ g(x) + g(y) + g(z) = G(u), \\ h(x) + h(y) + h(z) = H(u) \end{cases}$$

这里所有的函数假定都有连续的导数.

(1) 说出一个能在该点邻域内确定 x, y, z 作为 u 的函数的充分条件;

(2) 在 $f(x) = x, g(x) = x^2, h(x) = x^3$ 的情形下, 上述条件相当于什么?

【解】 (1)
$$\begin{vmatrix} f'(x_0) & f'(y_0) & f'(z_0) \\ g'(x_0) & g'(y_0) & g'(z_0) \\ h'(x_0) & h'(y_0) & h'(z_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

(2) x_0, y_0, z_0 互不相等.

§4 几何应用、极值与条件极值

一、基本要求

1. 会求空间曲线的切线和法平面方程, 曲面的切平面和法线方程.
2. 理解多元函数的极值和条件极值的概念, 掌握二元函数极值存在的充分必要条件.
3. 会求二元函数的极值, 掌握求条件极值的拉格朗日乘数法.

二、主要概念和内容

1. 空间曲线的切线与法平面

(1) 参数形式表示的空间曲线 $L: x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta, P(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$, 则过 P 点曲线的切线方程和法平面方程分别为:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

(2) 空间曲线 $L: y = y(x), z = z(x), a \leq x \leq b, P(x_0, y(x_0), z(x_0)) \in L$, 则过 P 点曲线的切线方程和法平面方程分别为:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)},$$

$$(x-x_0) + y'(x_0)(y-y_0) + z'(x_0)(z-z_0) = 0.$$

(3) 空间曲线 $L: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, $P(x_0, y_0, z_0) \in L$, 则过 P 点曲线的

的切线方程和法平面方程分别为:

$$\frac{x-x_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_P} = \frac{y-y_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_P} = \frac{z-z_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_P},$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_P (x-x_0) + \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_P (y-y_0) + \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_P (z-z_0) = 0.$$

2. 空间曲面的切平面与法线

(1) 空间曲面 $\pi: F(x, y, z) = 0$, $P(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, 则过 P 点曲面的切平面方程和法线方程分别为:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0,$$

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

(2) 空间曲面 $\pi: z = f(x, y)$, $P(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, 则过 P 点曲面的切平面方程和法线方程分别为:

$$f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0,$$

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

3. 多元函数的极值

(1) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $O(P_0)$ 内有定义. 若 $\forall P(x, y) \in O(P_0)$, 都有 $f(P) \leq f(P_0)$ (或 $f(P) \geq f(P_0)$), 则称函数 f 在点 P_0 取到极大(小)值, 点 P_0 称为 f 的极大(小)值点.

极大值和极小值统称为极值, 极大值点和极小值点统称为极值点.

(2) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 存在对各变元的偏导数, 且 P_0 是极值点, 则有 $f_x(P_0) = 0$, $f_y(P_0) = 0$.

(3) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数, 且 $f_x(P_0) = 0$, $f_y(P_0) = 0$. 令 $a_{11} = f_{xx}(P_0)$, $a_{12} = f_{xy}(P_0)$, $a_{22} = f_{yy}(P_0)$, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

(I) 若 $D > 0$, 则当 $a_{11} > 0$ (或 $a_{22} > 0$) 时, f 在 P_0 点取极小值; 当 $a_{11} < 0$ (或 $a_{22} < 0$) 时, f 在 P_0 点取极大值.

(II) 若 $D < 0$, 则 P_0 不是 f 的极值点.

(III) 若 $D = 0$, 则需进一步讨论.

4. 条件极值 函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值的求法。

(1) 从条件 $\varphi(x, y) = 0$ 中解出 $y = y(x)$, 代入 $z = f(x, y(x))$, 即化为一元函数的无条件极值问题。

(2) 拉格朗日乘数法: 作 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, 然后从 $F_x(x, y, \lambda) = 0, F_y(x, y, \lambda) = 0, F_\lambda(x, y, \lambda) = \varphi(x, y) = 0$ 中解出的 x, y 就是可能的极值点的坐标。

三、常用解题方法与典型例题

【例 5-63】 求下列曲线所示点处的切线方程和法平面方程:

(1) $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$, 在点 $t = \frac{\pi}{4}$;

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$, 在点 $(1, -2, 1)$ 。

【解】 (1) $t = \frac{\pi}{4}$ 所对应的曲线上的点为 $\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right)$, 曲线过该点的切向量为 $\tau = (a, 0, -c)$, 所以, 切线方程为 $\frac{x - \frac{1}{2}a}{a} = \frac{y - \frac{1}{2}b}{0} = \frac{z - \frac{1}{2}c}{-c}$, 法平面方程为 $a\left(x - \frac{1}{2}a\right) - c\left(z - \frac{1}{2}c\right) = 0$ 。

(2) 对 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 两边关于 x 求导, 得 $\begin{cases} 2x + 2yy' + 2zz' = 0 \\ 1 + y' + z' = 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{z - x}{y - z}, z' = \frac{y - x}{z - y}, y'|_{(1, -2, 1)} = 0, z'|_{(1, -2, 1)} = -1$, 所以切线方程为 $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{0} = \frac{z - 1}{-1}$, 法平面方程为 $(x - 1) - (z - 1) = 0 \Rightarrow x - z = 0$ 。

【例 5-64】 求下列曲面在所示点处的切平面方程和法线方程:

(1) $y - e^{2x-z} = 0$ 在点 $(1, 1, 2)$;

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 。

【解】 (1) 设 $f(x, y, z) = y - e^{2x-z}$, 则曲面过点 $P_0(1, 1, 2)$ 的切平面的法向量为 $n = (f_x, f_y, f_z)|_{P_0} = (-2e^{2x-z}, 1, e^{2x-z})|_{P_0} = (-2, 1, 1)$ 。故切平面方程为 $-2(x - 1) + (y - 1) + (z - 2) = 0$, 即 $2x - y - z + 1 = 0$; 法线方程为 $\frac{x - 1}{-2} = y - 1 = z - 2$ 。

(2) 设 $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, 则曲面过点 $P_0\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 的切平面的法向量为 $n = (f_x, f_y, f_z)|_{P_0} = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)|_{P_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$, 故切平面方程为 $\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{b}\left(y - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{3}}\right) = 0$, 即 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$;

法线方程为 $a\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = b\left(y - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = c\left(z - \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

【例 5-65】 证明曲线 $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ 与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的母线相交成同一角.

【证明】 因为曲线方程满足 $x^2 + y^2 = z^2$, 故曲线上的任一点都在锥面上. 取圆锥上任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则 x_0, y_0, z_0 满足 $x_0^2 + y_0^2 = z_0^2$, 且过 P_0 点的母线 L 的方程为 $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$, 其方向向量为 $n = (x_0, y_0, z_0)$. 设 L 和曲线的交点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 则 x_1, y_1, z_1 满足: $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$, 且 $\frac{x_1}{x_0} = \frac{y_1}{y_0} = \frac{z_1}{z_0}$, 记 $\frac{x_1}{x_0} = \frac{y_1}{y_0} = \frac{z_1}{z_0} = k$, 则 $x_1 = kx_0$, $y_1 = ky_0$, $z_1 = kz_0$. 曲线在 P_1 点的切向量为 $\tau = (x'(t), y'(t), z'(t))|_{P_1} = (x_1 - y_1, x_1 + y_1, z_1) = k(x_0 - y_0, x_0 + y_0, z_0)$. 设 α 为 n 与 τ 之间的夹角, 则

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{n \cdot \tau}{|n| |\tau|} = \frac{x_0(x_0 - y_0) + y_0(x_0 + y_0) + z_0^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_0 + y_0)^2 + z_0^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} (\text{常数}). \end{aligned}$$

所以曲线和圆锥上母线相交成同一角度.

【例 5-66】 求平面曲线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} (a > 0)$ 上任一点处的切线方程, 并证明这些切线被坐标轴所截取的线段等长.

【解】 对 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 两边关于 x 求导, 得 $\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \frac{dy}{dx} = 0$
 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$, 故切线方程为 $Y - y = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}(X - x)$. 令 $Y = 0$, 得 $X = a^{2/3}x^{1/3}$; 令 $X = 0$, 得 $Y = a^{2/3}y^{1/3}$. 所以 $\sqrt{X^2 + Y^2} = a^{2/3}$ (常数).

【例 5-67】 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的切平面, 使它平行于平面 $z + 4y$

$$+6z=0.$$

【解】 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上任一点处的法向量为 $n = (2x, 4y, 6z)$. 要使曲面的切平面平行于 $z + 4y + 6z = 0$, 则 $n = (2x, 4y, 6z) = m(1, 4, 6)$. 从而 $x = m, y = z = 2m$. 代入曲面方程得, $m^2 + 2(2m)^2 + 3(2m)^2 = 21 \Rightarrow m = \pm 1$, 所以, 所求的切平面为 $x - 1 + 4(y - 2) + 6(z - 2) = 0$ 和 $x + 1 + 4(y + 2) + 6(z + 2) = 0$.

【例 5-68】 证明曲面 $F(x - az, y - bz) = 0$ 的切平面与某一定直线平行, 其中 a, b 为常数.

【证明】 $F(x - az, y - bz) = 0$ 两边分别关于 x, y 求导, 得

$$F_1 \left(1 - a \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F_2 \left(-b \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1}{aF_1 + bF_2},$$

$$F_1 \left(-a \frac{\partial z}{\partial y} \right) + F_2 \left(1 - b \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_2}{aF_1 + bF_2}.$$

所以曲面 $F(x - az, y - bz) = 0$ 上任一点处的法向量为 $n = (F_1, F_2, -aF_1 - bF_2)$. 令 $\tau = (a, b, 1)$ 则 $n \cdot \tau = 0$. 所以切平面必与所有以 τ 为方向向量的直线平行.

【例 5-69】 证明曲面 $z = xe^{\frac{x}{y}}$ 的每一切平面都过原点.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} + xe^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} = e^{\frac{x}{y}} \left(1 + \frac{x}{y} \right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{\frac{x}{y}} \frac{x^2}{y^2}$, 故曲面过点 $P(x, y, z)$ 的切平面的法向量为 $n = (e^{\frac{x}{y}}(1 + xy^{-1}), -e^{\frac{x}{y}}x^2y^{-2}, -1)$, 从而该点的切平面为

$$e^{\frac{x}{y}}(1 + xy^{-1})(X - x) - e^{\frac{x}{y}}x^2y^{-2}(Y - y) - (Z - z) = 0,$$

由 $xe^{\frac{x}{y}} \left(1 + \frac{x}{y} \right) - ye^{\frac{x}{y}} \frac{x^2}{y^2} - z = e^{\frac{x}{y}} \left(x + \frac{x^2}{y} - \frac{x^2}{y} - x \right) = 0$ 知, 该切平面必过原点.

【例 5-70】 求下列函数的极大值和极小值点:

(1) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$;

(2) $f(x, y) = 3axy - x^3 - y^3 \quad (a > 0)$;

(3) $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y) \quad \left(0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2} \right)$.

【解】 (1) 令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y + 1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y + 1) = 0$, 则 $x - y + 1 = 0$, 即该直线上所有点都为稳定点. 由极小值点的定义以及 $f(x, y)$ 非负可知: $x - y + 1 = 0$ 上的所有点都为极小值点.

(2) 令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 3ay - 3ax^2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3ax - 3y^2 = 0$. 解得稳定点为 $(0, 0)$, (a, a) .

$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3a \\ 3a & 0 \end{vmatrix} = -9a^2 < 0$, 故 $(0, 0)$ 不是极值点,

$D_2 = \begin{vmatrix} -6a & 3a \\ 3a & -6a \end{vmatrix}_{(a,a)} = 27a^2 > 0$, 且 $a_{11} = -6a < 0$, 故 (a, a) 是极大值点.

(3) 令 $f'_x = \cos x - \sin(x-y) = 0$, $f'_y = -\sin y + \sin(x-y) = 0$, 得 $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 = \frac{\pi}{6}$. $a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0) = -\sqrt{3}$, $a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0) = -\sqrt{3}$, $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 3 - \frac{3}{4} > 0$, 又因为 $a_{11} < 0$, 所以 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 是 f 的极大值点.

【例 5-71】 已知 $y = ax^2 + bx + c$, 观测的一组数据 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, 利用最小二乘法, 求系数 a, b, c 所满足的三元一次方程组.

【解】 记 $f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) x_i^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) x_i = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

$$\text{记 } J = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix}, \quad J_1 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix},$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_i^4 & \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i & n \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \end{vmatrix}.$$

则上述方程组的解为 $a = \frac{J_1}{J}, b = \frac{J_2}{J}, c = \frac{J_3}{J}$.

【例 5-72】求函数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 在 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ 内的最大值和最小值.

【解】函数 $f(x, y)$ 在 D 内可导, 令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$, 解得 $x=0, y=0$ (稳定点), 而 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$, 故 $(0, 0)$ 不是 f 的极值点. 又 $f(x, y)$ 在闭区域 D 连续, 所以 $f(x, y)$ 在 D 必有最大值、最小值, 而且只能在边界上取得, 而在 D 的边界 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$ 上, $f(x, y) = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4$ ($-2 \leq x \leq 2$), 于是当 $x = \pm 2$ 时, $f(x, y)$ 有最大值 4; 当 $x=0$ 时, 有最小值 -4.

【例 5-73】求证: $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ 在 R^2 有最小值, 无最大值, 其中 $A > 0, B^2 < AC$.

【证明】令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + 2By + 2D = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + 2E = 0$, 解得 $x_0 = \frac{BE - DC}{AC - B^2}, y_0 = \frac{BD - AE}{AC - B^2}$, 即 $P_0 \left(\frac{BE - DC}{AC - B^2}, \frac{BD - AE}{AC - B^2} \right)$ 为稳定点, 又 $D = \begin{vmatrix} 2A & 2B \\ 2B & 2C \end{vmatrix} = 4(AC - B^2) > 0$, 且 $a_{11} = 2A > 0$, 所以 P_0 为 f 的最小值, 而无最大值.

【例 5-74】在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中, 求出面积最大的三角形.

【解】设三边长为 x, y, z , 则 $z = 2p - x - y$, 由海伦公式得三角形的面积为

$$S = \sqrt{2p(2p-x)(2p-y)(2p-z)} = \sqrt{2p(2p-x)(2p-y)(x+y)}.$$

记 $f(x, y) = \frac{S^2}{2p} = (2p-x)(2p-y)(x+y)$, 则要使 S 最大, 只需 $f(x, y)$ 最大. 令

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2p-x)(2p-y) - (2p-y)(x+y) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2p-x)(2p-y) - (2p-x)(x+y) = 0.$$

解得 $x = y = \frac{2p}{3}$, 这时 $z = \frac{2p}{3}$. 由实际情形, 当该三角形为正三角形时面积最大.

【例 5-75】 求下列函数在所给条件下的极值:

(1) $f = x + y$, 若 $x^2 + y^2 = 1$;

(2) $f = x^2 + y^2$, 若 $x + y - 1 = 0$;

(3) $f = x - 2y + 2z$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

【解】 (1) 作拉格朗日函数 $L(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, 令

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{稳定点为: } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

下面判断稳定点是否为极值点. 若记 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, 则 $F_y \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2y \Big|_{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{2} \neq 0$, 故方程在稳定点附近可惟一确定可微函数 $y = y(x)$, 且 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. 令 $g(x) = f(x, y(x))$, 则 $g'(x) = 1 + y' = 1 - \frac{x}{y}$, $g''(x) = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$, 则 $g'(x) \Big|_{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$, $g''(x) \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{2} < 0$, $g''(x) \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} > 0$, 所以 g 在 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 点取极大值, 在 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 点取极小值, 即 $f(x, y)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 点取极大值, 在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 点取极小值.

(2) $f(x, y)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 点取极小值 $\frac{1}{2}$.

(3) 构造拉格朗日函数 $L = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, 令

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -2 + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{稳定点为 } \left(\pm \frac{1}{3}, \mp \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3} \right).$$

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, 则 $F_x\left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}\right) = 2x\Big|_{\pm\frac{1}{3}} = \pm\frac{2}{3} \neq 0$, 所以 $F(x, y, z)$ 在稳定点附近可惟一确定单值函数 $z = z(x, y)$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

令 $g(x, y) = f(x, y, z(x, y))$, 则 $g_x = 1 - \frac{2x}{z}$, $g_y = -2 - \frac{2y}{z}$, $g_{xx} = -\frac{2x^2 + 2z^2}{z^3}$, $g_{yy} = -\frac{2y^2 + 2z^2}{z^3}$, $g_{xy} = -\frac{2xy}{z^3}$.

$$D = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{vmatrix} \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{33}{8} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -6 \end{vmatrix} = \frac{90}{4} > 0,$$

且 $a_{11} = g_{xx}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{15}{4} < 0$,

所以 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 是 $g(x, y)$ 的极大值点. 类似地可得, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 是 $g(x, y)$ 的极小值点.

【例 5-76】 求 $f = x^m y^n z^p$ 在条件 $x + y + z = a$, $a > 0$, $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 下的最大值.

【解】 作拉格朗日函数 $L(x, y, z) = x^m y^n z^p + \lambda(x + y + z - a)$, 令

$$\begin{cases} L_x = mx^{m-1}y^n z^p + \lambda = 0 \\ L_y = nx^m y^{n-1} z^p + \lambda = 0 \\ L_z = px^m y^n z^{p-1} + \lambda = 0 \\ x + y + z = a \end{cases} \Rightarrow \text{稳定点为} \begin{cases} x_0 = \frac{ma}{m+n+p} \\ y_0 = \frac{na}{m+n+p} \\ z_0 = \frac{pa}{m+n+p} \end{cases}$$

由于稳定点惟一, 而 $f(x, y, z)$ 在 $x + y + z = a$ 下有最大值, 所以最大值

$$f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p} m^m n^n p^p.$$

【例 5-77】 长为 a 的铁丝切成两段, 一段围成正方形, 另一段围成圆. 这两段的长各为多少时, 它们所围成的正方形面积和圆面积之和最小?

【解】 设围成正方形的一段长为 x , 围成圆的一段长为 y . 则 $x + y = a$, 面积之和为 $S = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2$. 利用拉格朗日乘数法可得, 当围成正方形

的铁丝长为 $\frac{4a}{4+\pi}$, 围成圆的铁丝长为 $\frac{\pi a}{4+\pi}$ 时, 它们的面积和最小.

§5 综合题

【例 5-78】 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 连续, $\forall c \in (-\infty, +\infty)$, 若集合 $E = \{(x, y) | f(x, y) > c, (x, y) \in D\}$ 不空, 则 E 为开集.

【证明】 设 $\forall c \in (-\infty, +\infty)$, E 非空. $\forall P_0(x_0, y_0) \in E$, 则 $f(P_0) > c$; 且 $P_0 \in D$, 因为 D 为区域, 所以 $\exists \delta_1 > 0$, 使得 $O(P_0, \delta_1) \subset D$. 令 $\epsilon_0 = f(P_0) - c > 0$. 由于 f 在 D 连续, 所以存在 $\delta_0 \in (0, \delta_1]$, 使当 $r(P, P_0) < \delta_0$ 时, 有 $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon_0$, 即 $f(x, y) > f(x_0, y_0) - \epsilon_0 = c$. 从而 $O(P_0, \delta_0) \subset E$. 由 P_0 的任意性知 E 为开集.

【例 5-79】 证明: 若函数 $f(x, y)$ 在某区域 D 内对变量 x 是连续的, 而对变量 y 关于 x 是一致连续的, 则 $f(x, y)$ 在区域 D 内连续.

【证明】 $\forall (x_0, y_0) \in D$, 有

$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|$,
由于 $f(x, y)$ 对变量 x 连续, 对变量 y 关于 x 是一致连续, 所以 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$; 及 $\exists \delta_2 > 0$, 当 $|y - y_0| < \delta_2$ 时, $\forall x$, 有 $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \epsilon$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ 时, $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < 2\epsilon$, 即 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续, 由 (x_0, y_0) 的任意性可知, $f(x, y)$ 在 D 连续.

【例 5-80】 设函数 $f(x, y)$ 在 $(a, b) \times (c, d)$ 连续, $\varphi(x)$ 在 (a, b) 连续, 证明若 $\forall x \in (a, b)$, 有 $\varphi(x) \in (c, d)$, 则 $g(x) = f(x, \varphi(x))$ 在 (a, b) 连续.

【证明】 设 $\forall x_0 \in (a, b)$, $\varphi(x_0) \in (c, d)$. 由 $f(x, y)$ 在 $(a, b) \times (c, d)$ 连续知, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$, $|y - \varphi(x_0)| < \delta$ 时, 有 $|f(x, y) - f(x_0, \varphi(x_0))| < \epsilon$. 又 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 故对上述 $\delta > 0$, $\exists \eta > 0$, 当 $|x - x_0| < \eta$ 时, 有 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta$. 从而, 当 $|x - x_0| < \min\{\delta, \eta\}$ 时, $|g(x) - g(x_0)| = |f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0))| < \epsilon$. 即 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 由 x_0 的任意性知, $g(x)$ 在 (a, b) 连续.

【例 5-81】 (复旦大学 2001 年) 设 $z = z(x, y)$ 是由隐函数 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定, 求表达式 $x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x}$, 并化简之.

【解】 对 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 两边关于 x 求导, 得

$$F'_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) + F'_2 \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2}\right) = 0,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{z}{x^2} \cdot F'_2 - F'_1}{\frac{F'_1}{y} + \frac{F'_2}{x}} = \frac{yzF'_2 - yx^2F'_1}{x^2F'_1 + xyF'_2}.$$

对 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 两边关于 y 求导, 得

$$F'_1 \cdot \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2}\right) + F'_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy^2F'_2 - xzF'_1}{xyF'_1 + y^2F'_2}.$$

所以

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(xy^2 + yz)F'_2 - (x^2y + xz)F'_1}{xF'_1 + yF'_2}.$$

【例 5-82】 设 $u = x^2 + y^2 + z^2$, 其中 $z = f(x, y)$ 为由方程 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【解】 把 z 看成 x, y 的函数, 方程 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 两边对 x 求偏导数得,

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 3yz + 3xy \frac{\partial z}{\partial x},$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2},$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2z \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2x + 2z \frac{x^2 - yz}{xy - z^2} \right)$$

$$= 2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x^2 - yz}{xy - z^2} + 2z \frac{\left(2x - y \frac{\partial z}{\partial x} \right) (xy - z^2) - (x^2 - yz) \left(y - 2z \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{(xy - z^2)^2}$$

$$= 2 + \frac{2(x^2 - yz)^2}{(xy - z^2)^2} + \frac{4xz^2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}{(xy - z^2)^3}.$$

【例 5-83】 设 $F(x, y, z)$ 有一阶连续偏导数, 并满足不等式:

$$y \frac{\partial F}{\partial x} - x \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \geq a > 0, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

证明当动点 (x, y, z) 沿曲线 $\Gamma: x = -\cos t, y = \sin t, z = t, t \geq 0$ 趋于无穷远点 (即 $t \rightarrow +\infty$) 时, $F(x, y, z) \rightarrow \infty$.

【证明】 由泰勒公式:

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) &= F(-\cos t, \sin t, t) \\
 &= F(-1, 0, 0) + [F(-\cos t, \sin t, t)]' \Big|_{t=\xi} (t-0) \\
 &= F(-1, 0, 0) + t \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sin t + \frac{\partial F}{\partial y} \cos t + \frac{\partial F}{\partial t} \right) \Big|_{t=\xi} \\
 &= F(-1, 0, 0) + t \left(\frac{\partial F}{\partial x} y - \frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_{t=\xi} \\
 &\geq F(-1, 0, 0) + at, \text{ 其中 } 0 < \xi < t.
 \end{aligned}$$

故当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $F(x, y, z) \rightarrow \infty$.

【例 5-84】 求曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 上与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

【解】 平面 $x+2y+z=4$ 的法向量为 $n = \{1, 2, 1\}$, 而曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的切向量为 $\tau = \{1, -2t, 3t^2\}$, 当曲线的切线与已知平面平行时, 有 $n \perp \tau$, 即 $n \cdot \tau = 0$, 亦即 $1-4t+3t^2=0 \Rightarrow t=1, t=\frac{1}{3}$. 当 $t=1$ 时, 曲线上的点 $(1, -1, 1)$ 的切向量为 $\tau = \{1, -2, 3\}$, 故切线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$. 当 $t=\frac{1}{3}$ 时, 曲线上的点 $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27})$ 的切向量为 $\tau = \{1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$, 故切线方程为 $\frac{x-\frac{1}{3}}{1} = \frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$, 即 $\frac{3x-1}{1} = \frac{9y+1}{-2} = \frac{27z-1}{3}$.

【例 5-85】 (中国人民大学 2000 年) 证明函数 $z = (1+e^y)\cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值, 而没有极小值.

【证明】 由 $\begin{cases} z_x = -(1+e^y)\sin x = 0 \\ z_y = (\cos x - y - 1)e^y = 0 \end{cases}$ 得, 函数有无穷多个稳定点 $(n\pi, (-1)^n - 1)$, 其中 $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 当 $n=2k$ 时, 对应的稳定点为 $(2k\pi, 0)$, 此时

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(1+e^y)\cos x \Big|_{(2k\pi, 0)} = -2, \\
 a_{12} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x \Big|_{(2k\pi, 0)} = 0, \\
 a_{22} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -(\cos x - y - z)e^y \Big|_{(2k\pi, 0)} = -1,
 \end{aligned}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, 且 $a_{11} < 0$, 所以 $f(x, y)$ 在 $(2k\pi, 0)$ 处有极大值且 $f(2k\pi, 0) = 2$.

当 $n = 2k + 1$ 时, 对应的稳定点为 $((2k + 1)\pi, -2)$, 此时

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(1 + e^y) \cos x \Big|_{((2k+1)\pi, -2)} = 1 + e^{-2},$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x \Big|_{((2k+1)\pi, -2)} = 0,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -(\cos x - y - x)e^y \Big|_{((2k+1)\pi, -2)} = -e^{-2},$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, 所以 $f(x, y)$ 在 $((2k + 1)\pi, -2)$ 处无极值.

第六章 多元函数积分学

§1 重积分

一、基本要求

1. 掌握二重积分化为累次积分的计算方法, 掌握二重积分的极坐标变换.
2. 掌握三重积分化为累次积分的计算方法, 掌握三重积分的柱坐标变换、球坐标变换.
3. 会用二重积分、三重积分计算一些几何量与一些物理量.

二、主要概念和结论

1. 重积分的定义 与定积分类似, 重积分也定义为一类和式的极限.

$$\text{二重积分: } \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

$$\text{三重积分: } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

其值取决于被积函数及其积分区域, 而与积分变量的记号无关; 连续是可积的必要条件.

与定积分不同的是: 二重积分是定义在平面区域 D 上的二元函数, 对 D 任意分割, 每一小块面积为 $\Delta\sigma_i$, 从 $\Delta\sigma_i$ 上任取的一点是 (ξ_i, η_i) , λ 是所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径中的最大值; 三重积分是定义在空间区域 Ω 上的三元函数, 对 Ω 任意分割, 每一小块体积为 Δv_i , 从 Δv_i 上任取的一点是 (ξ_i, η_i, ζ_i) , λ 是所有 Δv_i 的直径中的最大值.

几何与物理意义 当 $f(x, y) \geq 0$ 时, $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 表示以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶, D 为底的曲顶柱体的体积, 或表示面密度为 $\rho = f(x, y)$ 的平面薄片 D 的质量. 当 $f(x, y, z) \geq 0$ 时, $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ 表示体密度为 $\rho =$

$f(x, y, z)$ 的空间立体 Ω 的质量.

重积分具有与定积分类似的线性性质、可加性、单调性和积分中值定理.

2. 二重积分的计算 计算重积分的方法是化重积分为累次积分.

(1) 设 D 为 X -型区域, 即 $D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

设 D 为 Y -型区域, 即 $D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

(2) 变量代换 二重积分的变量代换公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

其中, 平面 Ouv 上的闭区域 Δ 通过变换 $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ 一一映射为平面 Oxy 上的闭区域 D , φ, ψ 在 Δ 上有二阶连续偏导数, 且当 $(u, v) \in \Delta$ 时, $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. 由变量代换公式可推出极坐标下二重积分的计算方法: 若 $D: \begin{cases} r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta) \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{cases}$, 则

计算方法: 若 $D: \begin{cases} r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta) \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{cases}$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

3. 三重积分的计算

(1) 设 $V = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

(2) 设 Ω 介于平面 $Z = e$ 和 $Z = f$ 之间, 且 $\forall z \in [e, f]$, 用 $Z = z$ 去截 Ω 得到截面 D_z , 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_e^f dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$.

(3) 变量代换 三重积分的变量代换公式

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

其中, 变换 $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ 将 $Ouvw$ 坐标系的闭区域 Ω 一一映射为 $Oxyz$ 坐标系的闭区域 V , $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ 在 Ω 有二阶连续偏导数, 且当 $(u, v, w) \in \Omega$ 时, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$.

特别, 在柱面坐标系下, 设直角坐标系 $Oxyz$ 下的积分区域 V 经变换(柱坐标变换)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = z, & -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

一一映射到柱面坐标系 $Or\theta z$ 下的区域 Ω , 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

若 $\Omega = \{(r, \theta, z) \mid z_1(r, \theta) \leq z \leq z_2(r, \theta), r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz.$$

在球面坐标下, 设 V 经变换(球坐标变换)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, & 0 \leq r < +\infty \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = r \cos \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

一一映射到球面坐标系 $Or\varphi\theta$ 下的区域 Ω , 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

4. 重积分的应用

(1) 曲面的面积 设曲面 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, 其中 D 是由逐段光滑曲线围成, f 具有对 x 和 y 的连续偏导数, 则其面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy.$$

(2) 质心 设 Ω 为一空间几何体, 其密度函数 $\rho = \rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 则 Ω 的质心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z)dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dx dy dz}.$$

若 Ω 为平面薄片, 也有类似的公式.

(3) 矩 分别称 $\iiint_{\Omega} x^k \rho(x, y, z)dx dy dz$, $\iiint_{\Omega} y^k \rho(x, y, z)dx dy dz$,

$\iiint_{\Omega} z^k \rho(x, y, z)dx dy dz$ 为空间几何体 Ω 关于 Oyz 面、 Ozx 面和 Oxy 面的 k 阶矩. 当 $k=0$ 时为零阶矩, 表示 Ω 的质量; 当 $k=1$ 时为静矩, 静矩与零阶矩之商为 Ω 的质心坐标; 当 $k=2$ 时分别称为对 Oyz 面、 Ozx 面和 Oxy 面的转动惯量, 分别记为 I_{yz} , I_{zx} 和 I_{xy} . 分别称

$$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dx dy dz,$$

$$\iiint_{\Omega} (z^2 + x^2)\rho(x, y, z)dx dy dz,$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dx dy dz$$

为 Ω 对 x 轴、 y 轴和 z 轴的转动惯量, 分别记为 I_x , I_y 和 I_z .

三、常用解题方法与典型例题

【例 6-1】 设 $D = [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y) = 1$, 若 x 是有理数; $f(x, y) = 0$, 若 x 是无理数. 证明 $f(x, y)$ 在 D 不可积.

【证明】 对 D 的任意分法 T , 因为在 $[0, 1]$ 上的有理数与无理数是处处稠密的, 所以每个小区域上的 x 值既存在有理数也存在无理数. 如果在每个小区域上取横坐标 x 为有理数的点 P'_k , 则积分和 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(P'_k)\Delta\sigma_k = 1$. 如果取横坐标 x 为无理数的点 P''_k , 则积分和 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(P''_k)\Delta\sigma_k = 0$. 所以当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 积分和 σ_n 不存在极限, 即 $f(x, y)$ 在 D 不可积.

【例 6-2】 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (y - 2x)dx dy$, $D = [3, 5] \times [1, 2]$;

(2) $\iint_D xye^{x^2+y^2}dx dy$, $D = [a, b] \times [c, d]$.

$$\begin{aligned}\text{【解】 (1) 原式} &= \int_3^5 dx \int_1^2 (y - 2x) dy = \int_3^5 \left(\frac{1}{2} y^2 - 2xy \right) \Big|_1^2 dx \\ &= \int_3^5 \left(\frac{3}{2} - 2x \right) dx = -13.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2) 原式} &= \int_a^b x e^{x^2} dx \int_c^d y e^{y^2} dy = \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_c^d \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{4} (e^{d^2} - e^{c^2}) (e^{b^2} - e^{a^2}).\end{aligned}$$

【例 6-3】 将二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化为不同顺序的累次积分:

(1) D 由 $y = x$, $x = 2$ 与 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 所围成;

(2) $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{【解】 (1) } \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2) } \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy \\ &= \int_{-1}^0 dy \int_{-y-1}^{y+1} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx.\end{aligned}$$

【例 6-4】 改变下列累次积分的次序:

$$(1) \int_0^2 dy \int_y^{3y} f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy.$$

$$\text{【解】 (1) } \int_0^2 dy \int_y^{3y} f(x, y) dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_4^6 dx \int_{\frac{x}{3}}^2 f(x, y) dy.$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^{3-2y} f(x, y) dx.$$

【例 6-5】 设 $f(x, y)$ 在所积分的区域 D 上连续, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

【证明】 因为 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 故 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 存在. D 可表示为

$$D = \{(x, y) \mid a \leq y \leq x, a \leq x \leq b\} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq y, y \leq x \leq b\},$$

故

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

【例 6-6】 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x^m y^k dx dy$ ($m, k > 0$), D 是由 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), $x = \frac{p}{2}$ 围成的区域;

(2) $\iint_D x dx dy$, D 是由 $y = 0$, $y = \sin x^2$, $x = 0$ 和 $x = \sqrt{\pi}$ 所围成的区域;

(3) $\iint_D (x + y) dx dy$, D 由 $y = e^x$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$ 所围成的区域;

(4) $\iint_D e^{x+y} dx dy$, D 是以 $(2, 2)$, $(2, 3)$ 和 $(3, 1)$ 为顶点的三角形.

【解】 (1) $D = \left\{ (x, y) \mid -p \leq y \leq p, \frac{y^2}{2p} \leq x \leq \frac{p}{2} \right\}$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-p}^p dy \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} x^m y^k dx = \int_{-p}^p y^k dy \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} x^m dx = \int_{-p}^p y^k \frac{1}{m+1} x^{m+1} \Big|_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} dy \\ &= \int_{-p}^p \left[\frac{1}{m+1} \left(\frac{p}{2} \right)^{m+1} y^k - \frac{1}{m+1} \left(\frac{1}{2p} \right)^{m+1} y^{2m+2+k} \right] dy \\ &= \left(\frac{p}{2} \right)^{m+1} \frac{p^{k+1} - (-p)^{k+1}}{(m+1)(k+1)} + \left(\frac{1}{2p} \right)^{m+1} \frac{(-p)^{2m+k+3} - p^{2m+k+3}}{(m+1)(2m+k+3)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \int_0^{\sqrt{\pi}} x dx \int_0^{\sin x^2} dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin x^2 dx^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= \iint_D (x + y) dx dy = \int_0^1 dx \int_1^{e^x} (x + y) dy \\ &= \int_0^1 \left[x(e^x - 1) + \frac{1}{2}(e^{2x} - 1) \right] dx \\ &= x e^x - e^x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}. \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 原式} = \int_2^3 e^x dx \int_{4-x}^{7-2x} e^y dy = \int_2^3 e^x e^y \Big|_{4-x}^{7-2x} dx = \int_2^3 e^3 dx = e^3.$$

【例 6-7】 求二重积分 $I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dy \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2 dx$.

【解】 $D = \left\{ (x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\}$

$$= \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\},$$

交换积分次序 $I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx \int_0^x y^2 \sin x^2 dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^2 \sin x^2 dx^2$

$$\stackrel{x^2=t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} t \sin t dt = -\frac{1}{6} t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} \cos t dt = \frac{1}{6}.$$

注 (1) 将二重积分化为累次积分, 其中最基本步骤就是根据积分域 D 确定累次积分的积分限. 作出 D 的图形可以提供非常直观的认识, 因此切不可忽视作图.

(2) 将二重积分化为累次积分时, 积分次序对计算是有影响的, 选择得不好, 可能使计算较繁, 甚至积不出来. 本例是先对 x 积分, 再对 y 积分, 而 $\sin x^2$ 的原函数不能用初等函数表示. 因此按上述积分进行累次积分是行不通的, 所以考虑改变积分的次序. 总之在求重积分(包括三重积分等)时, 应同时兼顾积分域和被积函数的特点, 合理地选择积分次序.

【例 6-8】 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_V (x+y+z) dx dy dz, V: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2;$

(2) $\iiint_V z dx dy dz, V$ 由曲面 $z = x^2 + y^2, z = 1, z = 2$ 所围成;

(3) $\iiint_V (1+x^4) dx dy dz, V$ 由曲面 $x^2 = z^2 + y^2, x = 2, x = 4$ 所围成;

(4) $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz, V$ 由曲面 $z = xy, y = x, z = 0, x = 1$ 所围成.

【解】 (1) 考虑到对称性.

$$\text{原式} = 3 \iiint_V z dx dy dz = 3 \int_{-a}^a z dz \iint_{D_z} dx dy = 3\pi \int_{-a}^a z(a^2 - z^2) dz = 0.$$

(2) 用平行于 Oxy 面的平面 $Z = z (z \in [1, 2])$ 去截 V , 其截面为 D_z : $x^2 + y^2 = z$, 面积为 πz , 故原式 $= \int_1^2 dz \iint_{D_z} z dx dy = \int_1^2 \pi z^2 dz = \frac{7}{3} \pi$.

(3) 用平行于 Oyz 面的平面 $X = x (x \in [2, 4])$ 去截 V , 其截面为 D_x : $y^2 + z^2 = x^2$, 面积为 πx^2 , 故

$$\text{原式} = \int_2^4 (1+x^4) dx \iint_{D_x} dy dz = \int_2^4 \pi x^2 (1+x^4) dx = \frac{56\pi}{3} + \frac{16256\pi}{7}.$$

(4) 原式 $= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz = \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_0^x y^6 x^5 dy$

$$= \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}.$$

【例 6-9】 改变下列累次积分的次序:

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz;$$

$$(2) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$$

【解】 (1) 原式 = $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$
 $= \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy +$
 $\int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_{x+y}^{1-x} f(x, y, z) dy.$

$$(2) \text{ 原式} = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx$$

$$= \int_0^1 dz \int_{-z}^z dx \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy.$$

【例 6-10】 求 V 由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2rz$ 所确定的立体之体积.

【解】 因为 V 是两个对称的球冠, 只需计算上半球冠即可. 上半球冠为

$$V_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq \frac{r}{2}.$$

故
$$V = 2 \iiint_V dV = 2 \int_{\frac{r}{2}}^r dz \iint_D dx dy = 2\pi \int_{\frac{r}{2}}^r \sqrt{r^2 - z^2} dz$$

$$\stackrel{z=r \cos \theta}{=} 2\pi r^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \pi r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

【例 6-11】 用极坐标变换将 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化为累次积分:

(1) D : 圆 $x^2 + y^2 \leq ay$ ($a > 0$);

(2) D : 正方形 $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$.

【解】 (1) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^{a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

$$(2) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr +$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

【例 6-12】 用极坐标变换计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D: \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2;$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D \text{ 是由双纽线 } (x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2) (x \geq 0) \text{ 围成.}$$

【解】 (1) 原式 = $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} \sin r \cdot r dr = -6\pi^2.$

$$(2) \text{ 原式} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 \cos 2\theta}} r^2 \cdot r dr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} a^4 \cos^2 2\theta d\theta = \frac{\pi a^4}{16}.$$

【例 6-13】 在下列积分中引入新变量 u, v , 将它们化为累次积分:

$$(1) \int_a^b dx \int_{ax}^{\beta x} f(x, y) dy \quad (0 < a < b, 0 < a < \beta), \text{ 若 } u = x, v = \frac{y}{x};$$

$$(2) \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a}, x \geq 0, y \geq 0\},$$

若 $x = u \cos^4 v, y = u \sin^4 v.$

【解】 (1) $x = u, y = xv = uv, D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, ax \leq y \leq \beta x\}$ 变为 $\Delta = \{(u, v) | a \leq u \leq b, a \leq v \leq \beta\}$, 而

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u,$$

故

$$\text{原式} = \int_a^b du \int_a^{\beta} f(u, uv) u dv.$$

(2) 由 $x = u \cos^4 v, y = u \sin^4 v$, 则 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 的参数方程为 $x = a \cos^4 v, y = a \sin^4 v \quad (0 \leq v \leq \frac{\pi}{2})$, $|J| = 4 |u \cos^3 v \sin^3 v|$, D 变为 $\Delta = \{(u, v) | 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}.$

$$\text{原式} = 4 \int_0^a u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) dv$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v dv \int_0^a u f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) du.$$

【例 6-14】 作适当的变量代换求 $\iint_D xy dx dy$, D 由 $xy = 2, xy = 4, y = x, y = 2x$ 围成.

【解】 作变换 $u = xy, v = \frac{y}{x}$, 则区域 D 变为区域 $\Delta = \{2 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 2\}$, 且 $|J| = \frac{1}{2v}$, 于是原式 $= \int_2^4 du \int_1^2 u \cdot \frac{1}{2v} dv = 3 \ln 2$.

【例 6-15】 利用二重积分求下列曲面围成的立体的体积:

(1) $z = xy, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$;

(2) $z = x^2 + y^2, z = x + y$.

【解】 (1) 立体在 Oxy 面上的投影区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 则

$$V = \iint_D xy dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 \cos\theta \sin\theta dr = \frac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{8} a^4.$$

(2) 立体在 Oxy 面上的投影区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x + y\}$.

令 $x = \frac{1}{2} + r \cos\theta, y = \frac{1}{2} + r \sin\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$), 则

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(x+y) - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[(1 + r \cos\theta + r \sin\theta) - \left(r^2 + \frac{1}{2} + r \cos\theta + r \sin\theta \right) \right] r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) r dr = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

【例 6-16】 求曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$ 所围的面积.

【解】 令 $x = \frac{a}{c} r \cos\theta, y = \frac{b}{c} r \sin\theta$, 则曲线的极坐标方程为 $r^2 = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). 设区域在第一象限的部分为 D_1 . 由对称性知, 所求面积

$$S = 4 \iint_{D_1} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2} \sin 2\theta}} \frac{ab}{c^2} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{ab}{c^2} \sin 2\theta d\theta = \frac{ab}{2c^2}.$$

【例 6-17】 用柱坐标变换计算下列三重积分:

(1) $\iiint_V (x^2 + y^2)^2 dx dy dz$, V 由曲面 $z = x^2 + y^2, z = 4, z = 16$ 围成;

(2) $\iiint_V (\sqrt{x^2 + y^2})^3 dx dy dz$, V 由曲面 $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16,$

$z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ 围成.

【解】 (1) 作柱坐标变换: $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta, z = z$, 则 V 在柱坐标下为 $\{(r, \theta, z) | 4 \leq z \leq 16, 0 \leq r \leq \sqrt{z}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. 从而

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_4^{16} dz \int_0^{\sqrt{z}} r^4 \cdot r dr = 5440\pi.$$

(2) 作柱坐标变换: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, 则三曲面方程分别为 $r = 3$, $r = 4$, $z = r$. 故在柱坐标下 $V = \{(r, \theta, z) | 3 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq r\}$. 从而

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_3^4 dr \int_0^r r^3 \cdot r dz = \frac{3367}{3}\pi.$$

【例 6-18】 用球坐标变换计算下列三重积分:

(1) $\iiint_V (x+y+z) dx dy dz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$;

(2) $\iiint_V (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5 dx dy dz$, V 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成;

(3) $\iiint_V x^2 dx dy dz$, V 由 $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 围成.

【解】 (1) 作球坐标变换, V 可表为 $\{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$. 因此

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr = 0.$$

(2) 作球坐标变换, V 可表为 $\{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq 2\cos\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^5 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\cos^8\varphi \sin\varphi d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{32}{9} d\theta = \frac{64\pi}{9}. \end{aligned}$$

(3) 作球坐标变换, 由 $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$, $r = 2\sqrt{2}$. 区域 V 可表示为 $\{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq 2\sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{128}{5} \sqrt{2} \cos^2\theta \sin^3\varphi d\varphi = \left(\frac{256\sqrt{2}}{5} - \frac{64}{3} \right) \pi. \end{aligned}$$

【例 6-19】 求下列各曲面所围成立体的体积:

(1) $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y = x^2$;

$$(2) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, a > 0, b > 0, c > 0).$$

【解】 (1) 区域 V 为: $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2$, 故

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

(2) 令 $x = ar \cos^2 \theta \sin \varphi, y = br \sin^2 \theta \sin \varphi, z = cr \cos \varphi$ 则有 $|J| = abcr^2 \sin 2\theta \sin \varphi$, 且 V 可表示为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$, 于是

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 2abcr^2 \cos \theta \sin \theta \sin \varphi dr \\ &= 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{1}{3} abc. \end{aligned}$$

【例 6-20】 求曲面 $z = \sqrt{2xy}$ 被平面 $x + y = 1, x = 1$ 及 $y = 1$ 所截下部分的面积.

【解】 曲面在 Oxy 面上的投影区域为 $D = \{(x, y) \mid x + y \geq 1, x \leq 1, y \leq 1\}$. 故

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{y}{2x}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x}{2y}} \right)^2} dx dy = \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 dx \int_x^1 \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(2\sqrt{xy} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{x}} y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_x^1 dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \left(3\sqrt{x} - 4x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

§ 2 曲线积分与曲面积分

一、基本要求

1. 掌握计算两类曲线积分的方法, 掌握两类曲线积分之间的关系.
2. 掌握计算两类曲面积分的方法, 掌握两类曲面积分之间的关系.
3. 会用曲线积分和曲面积分表达和计算一些物理量.

二、主要概念和结论

1. 第一型曲线积分及其计算 由曲线构件 L 的质量问题引入第一型(对弧长的)曲线积分

$$\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i,$$

其中 f 在 L 上有定义且有界, Δs_i 是对 L 任意分割的第 i 段的长度 ($\Delta s_i > 0$), (ξ_i, η_i, ζ_i) 为 Δs_i 上任取的一点, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta s_i|$.

设 L 是光滑曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $f(x, y, z)$ 在 L 连续, 则 $f(x, y, z)$ 在 L 上的第一型曲线积分存在, 且

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

公式右端为定积分, 其积分限总是下限小于上限.

2. 第一型曲面积分及其计算 由计算曲面构件 S 的质量问题引入第一型(对面积的)曲面积分

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

其中 f 在 S 上有定义且有界, ΔS_i 是对 S 任意分割的第 i 块的面积 ($\Delta S_i > 0$), (ξ_i, η_i, ζ_i) 为 ΔS_i 上任取的一点, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta S_i \text{ 的直径}|$.

设 S 是光滑曲面 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, D 为有界闭区域, $f(x, y, z)$ 在 S 上连续, 则 $f(x, y, z)$ 在 S 上的第一型曲面积分存在, 且

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy.$$

3. 第二型曲线积分及其计算 由计算变力沿曲线作功的问题引入第二型(对坐标的)曲线积分

$$\int_L P(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x, y, z) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i,$$

$$\int_L R(x, y, z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i,$$

其中 L 为有向曲线, P, Q, R 在 L 上有定义且有界, $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ 分别是对 L 任意分割后的第 i 个有向小弧段在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影, (ξ_i, η_i, ζ_i) 和

λ 同第一型曲线积分.

将上述三个积分相加, 简记为 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$. 设 L 的起点为 A , 终点为 B , 则该积分结果为变力 $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ 从 A 点沿曲线 L 到 B 点所作的功. 而上述的每一个积分分别表示 F 在三个坐标轴上的分力所作的功.

设 \widehat{AB} 为光滑曲线段 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, t 介于 α 与 β 之间, $f(x, y, z)$ 在 \widehat{AB} 上连续, 且 $t = \alpha$ 对应于 A 点, $t = \beta$ 对应于 B 点, \widehat{AB} 自身不相交, 则 $f(x, y, z)$ 在 \widehat{AB} 上的第二型曲线积分存在, 且

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt,$$

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt,$$

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt.$$

与第一型曲线积分不同, 公式右端定积分的下限对应曲线的起点, 上限对应曲线的终点, 和它们的大小没有关系.

4. 第二型曲面积分 由计算通过曲面的流体的流量问题引入第二型(对坐标的)曲面积分

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta D_i)_{xy},$$

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta D_i)_{yz},$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta D_i)_{zx},$$

其中 S 为光滑的双侧曲面, P, Q, R 在 S 上有定义且有界, $(\Delta D_i)_{xy}$, $(\Delta D_i)_{yz}$, $(\Delta D_i)_{zx}$ 分别是对 S 任意分割的第 i 块小曲面在 Oxy 面、 Oyz 面和 Ozx 面上的有向投影, (ξ_i, η_i, ζ_i) 和 λ 同第一型曲面积分.

将上述三个积分相加, 简记为 $\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$. 该积分结果就是流速为 $v(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ 的流体在单位时间内流过曲面 S 的流量. 若 S 的侧的方向和 v 的方向一致, 则结果为正; 相反时, 结果为负; 垂直时, 为零.

设 S 是光滑曲面 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, D_{xy} 为有界闭区域, $R(x, y, z)$ 在 S 连续. 则 $R(x, y, z)$ 在 S 上的第二型曲面积分为

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

其中 S 为上侧时取正号, S 为下侧时取负号.

在类似的条件下, 设 $S: x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$, 有

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

其中 S 为前侧时取正, S 为后侧时取负.

设 $S: y = y(z, x)$, $(z, x) \in D_{zx}$, 有

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(x, z), z) dz dx,$$

其中 S 为右侧时取正, S 为左侧时取负.

三、常用解题方法与典型例题

【例 6-21】 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 L 是以 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(0, 1)$ 为顶点的三角形;

(2) $\int_L y^2 ds$, 其中 L 为摆线的一拱 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

(3) $\int_L xyz ds$, 其中 L 是曲线 $x = t$, $y = \frac{2}{3} \sqrt{2t^3}$, $z = \frac{1}{2} t^2 (0 \leq t \leq 1)$.

【解】 (1) 原式 = $\int_{AO} (x^2 + y^2) ds + \int_{OB} (x^2 + y^2) ds + \int_{BA} (x^2 + y^2) ds$
 $= \int_0^1 y^2 dy + \int_0^2 x^2 dy + \int_0^1 [(2 - 2y)^2 + y^2] \sqrt{5} dy$
 $= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{3} = 3 + \frac{5\sqrt{5}}{3}.$

(2) $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$, $ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sin \frac{t}{2} dt = 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt \\ &= 32a^3 \int_0^{\pi} \sin^5 u du = \frac{256}{15} a^3. \end{aligned}$$

$$(3) \quad x' = 1, \quad y' = \sqrt{2}t, \quad z' = t,$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{1 + 2t + t^2} dt = (t + 1) dt,$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 t \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} t^2 (1+t) dt = \int_0^1 \frac{1}{3} \sqrt{2} t^{\frac{9}{2}} (1+t) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{2}{11} + \frac{2}{13} \right). \end{aligned}$$

【例 6-22】 计算下列第一型曲面积分：

(1) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, 其中 S 是立体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界曲面；

(2) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

【解】 (1) 记 S_1 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$), S_2 为 $z = 1$ ($x^2 + y^2 \leq 1$). 则 S_1 和 S_2 在 Oxy 面上的投影都为 $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS \\ &= \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy + \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 0 + 0} dx dy \\ &= (\sqrt{2} + 1) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = (\sqrt{2} + 1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \pi. \end{aligned}$$

(2) 由对称性, 有 $\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$, 从而

$$\text{原式} = \frac{2}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{2}{3} R^2 \iint_S dS = \frac{2}{3} R^2 4\pi R^2 = \frac{8}{3} \pi R^4.$$

【例 6-23】 设曲线 L 的方程为 $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ ($0 \leq t \leq t_0$), 它在每一点的密度与该点的矢径平方成反比, 且在点 $(1, 0, 1)$ 处为 1, 求它的质量.

【解】 设 $\rho = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}$, 则由 $1 = \frac{k}{1^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2$, 从而

$$\rho = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2}{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} = e^{-2t} (0 \leq t \leq t_0), \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} M &= \int_L \rho ds = \int_L e^{-2t} ds = \int_0^{t_0} e^{-2t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \\ &= \int_0^{t_0} e^{-2t} \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} (1 - e^{-t_0}). \end{aligned}$$

【例 6-24】 设有一质量分布不均匀的半圆弧 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)

$\leq \pi$), 其线密度 $\rho = a\theta$ (a 为常数), 求它对原点 $(0,0)$ 处质量为 m 的质点的引力.

【解】 任取弧长微元 ds , 它对原点处质量 m 的质点的引力为 $dF = \frac{km\rho ds}{r^2} \cdot r_0$, 其中 k 为引力常数, r_0 是向径的单位向量. 将 $\rho = a\theta$, $ds = r d\theta$ 代入, 得 dF 在 x 轴的投影为

$$dF_x = \frac{km}{r^2} \cdot a\theta \cdot r d\theta \cdot \cos\theta = \frac{km}{r} \cdot a\theta \cos\theta d\theta,$$

在 y 轴的投影为

$$dF_y = \frac{km}{r^2} \cdot a\theta \cdot r d\theta \cdot \sin\theta = \frac{km}{r} \cdot a\theta \sin\theta d\theta,$$

$$\text{故 } F_x = \int_0^\pi \frac{km}{r} \cdot a\theta \cos\theta d\theta = \frac{km}{r} \cdot a \left[\theta \sin\theta \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin\theta d\theta \right] = -2 \frac{km}{r} \cdot a,$$

$$F_y = \int_0^\pi \frac{km}{r} \cdot a\theta \sin\theta d\theta = \frac{km}{r} \cdot a \left[-\theta \cos\theta \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos\theta d\theta \right] = \frac{km}{r} \cdot a\pi.$$

【例 6-25】 计算球面三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 的围线的重心坐标. 设线密度 $\rho = 1$.

【解】 线密度为常数, 曲线有对称性, 只计算重心的 x 坐标即可. 记 $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$, 再记 \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CA} 分别表示球面三角形的三条边. 该球面三角形的质量

$$\begin{aligned} M &= \int_L \rho ds = 3 \int_{\widehat{AB}} \rho ds = 3 \cdot \frac{\pi}{2} a = \frac{3}{2} \pi a. \\ x_0 &= \frac{\int_L x ds}{M} = \frac{\int_{\widehat{AB}} x ds + \int_{\widehat{BC}} x ds + \int_{\widehat{CA}} x ds}{M} \\ &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos\theta \cdot a d\theta + 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos\theta d\theta}{\frac{3}{2} \pi a} = \frac{2a^2}{\frac{3}{2} \pi a} = \frac{4a}{3\pi}. \end{aligned}$$

于是, 重心坐标为 $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi} \right)$.

【例 6-26】 计算下列第二型曲线积分:

$$(1) \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy, \quad L \text{ 为 } y = x^2 \text{ 从 } (1,1) \text{ 到 } (-1,1);$$

$$(2) \int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy, \quad L \text{ 为以 } A(1,0), B(2,0), C(2,1),$$

$D(1,1)$ 为顶点的正方形沿逆时针方向.

$$\begin{aligned} \text{【解】 (1) 原式} &= \int_1^{-1} (x^2 - 2x \cdot x^2) dx + \int_1^{-1} (x^4 - 2x \cdot x^2) \cdot 2x dx \\ &= \int_1^{-1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4) dx = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

(2) 方法一

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} \right) (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy \\ &= \int_1^2 (x^2 + 0^2) dx + \int_0^1 (2^2 - y^2) dy + \int_2^1 (x^2 + 1^2) dx + \int_1^0 (1^2 - y^2) dy \\ &= \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{7}{3} - 1 \right) + \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = 2. \end{aligned}$$

方法二 应用格林公式.

$$\text{原式} = \iint_D (2x - 2y) dx dy = \int_1^2 dx \int_0^1 (2x - 2y) dy = \int_1^2 (2x - 1) dx = 2.$$

【例 6-27】 计算曲线积分 $\int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$.

(1) L 为球面三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界线, 从球的外侧看去, L 的方向为逆时针方向;

(2) L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和柱面 $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$ 的交线位于 Oxy 平面上方的部分, 从 x 轴上 $(b, 0, 0) (b > a)$ 点看去, L 是顺时针方向.

【解】 (1) 方法一 围线在 Oxy 平面部分的方程为 $x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 0 (0 \leq \theta \leq 2\pi)$, 根据对称性知,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 \theta \cdot (-\sin \theta) + (0 - \cos^2 \theta) \cdot \cos \theta] d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d\sin \theta \\ &= 3 \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \sin \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -4. \end{aligned}$$

方法二 利用斯托克斯公式, 设 S 为单位球面在第一卦限的部分, 取上侧. 则

$$\text{原式} = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S (-2y - 2z) dy dz + (-2z - 2x) dz dx + (-2x - 2y) dx dy.$$

$$S \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \cos\theta \sin\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi \end{vmatrix} = -\sin\varphi \cos\varphi.$$

$$\begin{aligned} \iint_S (-2x - 2y) dx dy &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \sin\varphi) \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^2\varphi d\varphi = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

由对称性知

$$\iint_S (-2z - 2x) dz dx = \iint_S (-2x - 2y) dx dy = -\frac{4}{3}.$$

故

$$\text{原式} = -4.$$

(2) 方法一 L 的参数方程是

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos\theta, \quad y = \frac{a}{2} \sin\theta, \quad z^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos\theta, \quad (z \geq 0).$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{a^2}{4} \sin^2\theta - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos\theta \right) \right] \cdot \left(-\frac{a}{2} \sin\theta \right) + \right. \\ &\quad \left[\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos\theta \right) - \left(\frac{a}{2} \cos\theta + \frac{a}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{a}{2} \cos\theta + \\ &\quad \left[\left(\frac{a}{2} \cos\theta + \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} \sin^2\theta \right] \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \Big\} d\theta \\ &= \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \sin^3\theta + \sin\theta - \sin\theta \cos\theta + \frac{1}{2} \cos\theta - 2\cos^2\theta - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \cos^3\theta + \frac{1}{2} \cos^2\theta \cos \frac{\theta}{2} + \cos\theta \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos \frac{\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{a^3}{4} (-2\pi) = -\frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

方法二 利用斯托克斯公式, 参见第(1)小题的方法二.

【例 6-28】 求闭曲线 L 上的第二型曲线积分 $\oint_L \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$.

(1) L 为圆 $x^2 + y^2 = a^2$, 逆时针方向;

(2) L 为以 $(0, 0)$ 为中心, 边长为 a , 对边平行于坐标轴的正方形, 顺时针

方向.

【解】 (1) 令 $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \theta \cdot (-a \sin \theta) - a \cos \theta \cdot (a \cos \theta)}{a^2} d\theta = - \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi.$$

(2) 方法一 正方形的顶点为 $A\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, $B\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, $C\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $D\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\int_{AD} + \int_{DC} + \int_{CB} + \int_{BA} \right) \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{-\left(-\frac{a}{2}\right)dy}{\frac{a^2}{4} + y^2} + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{a}{2}dx}{x^2 + \frac{a^2}{4}} + \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{-\frac{a}{2}dy}{\frac{a^2}{4} + y^2} + \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{-\frac{a}{2}dx}{x^2 + \frac{a^2}{4}} \\ &= 8 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a^2}{4} + t^2} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

方法二 以原点为圆心, 充分小的正数 $\epsilon < \frac{a}{2}$ 为半径作圆 l , 逆时针方向. 这时 l 完全包含在此正方形内部. 在 L 与 l 之间的区域 D 上, $P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ 和 $Q(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$ 都有连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 应用格林公式及(1), 则

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} &= \left(\oint_L + \oint_l \right) \left(\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \right) - \oint_l \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \\ &= - \iint_D 0 dx dy - \oint_l \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -(-2\pi) = 2\pi. \end{aligned}$$

【例 6-29】 对力场 F 对运动的单位质点所作的功, 此质点沿曲线 L 从 A 点运动到 B 点:

(1) $F = (x - y, y - z, z - x)$, L 的矢量形式为 $r(t) = ti + t^2j + t^3k$, $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$;

(2) $F = (y^2, z^2, x^2)$, L 的参数式为 $x = a \cos t$, $y = \beta \sin t$, $z = \gamma t$ (α, β, γ 为正数), $A(\alpha, 0, 0)$, $B(\alpha, 0, 2\pi\gamma)$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 (1)} \quad W &= \int_L (x - y)dx + (y - z)dy + (z - x)dz \\ &= \int_0^1 (t - t^2)dt + \int_0^1 (t^2 - t^3) \cdot 2t dt + \int_0^1 (t^3 - t) \cdot 3t^2 dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (t - t^2 + 2t^3 - 2t^4 + 3t^5 - 3t^3) dt = \frac{1}{60}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad W &= \int_L \vec{F} d\vec{s} = \int_0^{2\pi} [\beta^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin t) + \gamma^2 t^2 \cdot (\beta \cos t) + a^2 \cos^2 t \cdot \gamma] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a\beta^2 \sin^3 t + \beta\gamma^2 t^2 \cos t + a^2 \gamma \cos^2 t) dt = \pi a^2 \gamma. \end{aligned}$$

【例 6-30】 设 P, Q, R 在 L 上连续, L 为光滑弧段, 弧长为 l , 证明

$$\left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| \leqslant Ml.$$

其中

$$M = \max_{(x,y,z) \in L} \{ \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \}.$$

【证明】

$$\begin{aligned} \left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| &= \left| \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \right| \\ &\leqslant \int_L |P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma| ds. \end{aligned}$$

应用柯西不等式,

$$\begin{aligned} |P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma| &\leqslant \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} \\ &= \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \leqslant \max_{(x,y,z) \in L} \{ \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \} = M. \end{aligned}$$

故

$$\left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| \leqslant M \int_L ds = Ml.$$

【例 6-31】 设光滑闭曲线 L 在光滑曲面 S 上, S 的方程为 $z = f(x, y)$, 曲线 L 在 Oxy 平面上的投影曲线为 l , 函数 $P(x, y, z)$ 在 L 上连续, 证明

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_l P(x, y, f(x, y)) dx.$$

【证明】 任给 l 一个任意的分法 T , 分点为 $m_0, m_1, \dots, m_n (m_0 = m_n)$.

第 i 个小弧 $\widehat{m_{i-1} m_i}$ 对应空间曲线 L 上第 i 个小弧 $\widehat{M_{i-1} M_i}$. 在小弧 $\widehat{m_{i-1} m_i}$ 上任取一点 $A_i(\xi_i, \eta_i, 0)$, 在第 i 个小弧 $\widehat{M_{i-1} M_i}$ 上有对应的点 $A_i^*(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$. 于是

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)) \Delta x_i \\ &= \oint_l P(x, y, f(x, y)) dx. \end{aligned}$$

【例 6-32】 计算 $I = \int_L xyz dz$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $y = z$ 相交的圆, 其方向按曲线依次经过 1, 2, 7, 8 卦限.

【解】 L 在 Oxz 平面上的投影曲线为 $l: x^2 + 2z^2 = 1$, 其方向是逆时针方向. 由例 6-31 得

$$\begin{aligned} I &= \oint_L x \cdot z \cdot z dx = \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin^2\theta \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \cos 4\theta}{\sqrt{2}} d\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}. \end{aligned}$$

【例 6-33】 计算下列第二型曲面积分:

(1) $\iint_S z dx dy + x dy dz + y dz dx$, S 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截部分的外侧;

(2) $\iint_S xy dy dz + yz dz dx + xz dx dy$, S 是由平面 $x = y = z = 0$ 和 $x + y + z = 1$ 所围的四面体表面的外侧;

(3) $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

【解】 (1) 方法一 由于 S 垂直于 Oxy 平面, 故 $\iint_S z dx dy = 0$. 将 S 分为前半柱面 $S_1: x = \sqrt{1 - y^2}$ (取前侧) 和后柱面 $S_2: x = -\sqrt{1 - y^2}$ (取后侧). 对于 $\iint_S x dy dz$, 因 S_1 和 S_2 在 Oyz 面上的投影为 $D: -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3$, 故

$$\begin{aligned} \iint_S x dy dz &= \iint_{S_1} x dy dz + \iint_{S_2} x dy dz \\ &= \iint_D \sqrt{1 - y^2} dy dz - \iint_D -\sqrt{1 - y^2} dy dz = 2 \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

由对称性知, $\iint_S y dz dx = 3\pi$, 从而原式 $= 6\pi$.

方法二 由于 S 垂直于 Oxy 平面, 故 $\iint_S z dx dy = 0$. S 的参数方程为 $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = z$, 其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 3$, $\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta$. 将 S 分为前半柱面 $S_1: x = \sqrt{1 - y^2}$ (取前侧) 和后半柱面 $S_2: x = -\sqrt{1 - y^2}$ (取后侧). 则

$$\begin{aligned}
\iint_S x dy dz &= \iint_{S_1} x dy dz + \iint_{S_2} x dy dz \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 \cos\theta \cdot |\cos\theta| dz - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^3 \cos\theta \cdot |\cos\theta| dz \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \int_0^3 dz - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\theta \cdot (-\cos\theta) d\theta \int_0^3 dz \\
&= \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 3\pi.
\end{aligned}$$

由对称性知, $\iint_S y dz dx = 3\pi$. 从而原式 $= 6\pi$.

方法三 用高斯公式. 设 S_1 为 $z = 0$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 的下侧, S_2 为 $z = 3$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 的上侧, 则 S 、 S_1 和 S_2 一起构成一个封闭曲面, 记它们围成的空间闭区域为 V , 利用高斯公式, 得

$$\oiint_{S+S_1+S_2} x dx dy + x dy dz + y dz dx = \iiint_V (1+1+1) dx dy dz = 3 \cdot 3\pi = 9\pi.$$

而 $\iint_{S_1} x dx dy + x dy dz + y dz dx = 0,$

$$\iint_{S_2} x dx dy + x dy dz + y dz dx = \iint_{D_{xy}} 3 dx dy = 3\pi,$$

其中 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$. 故

$$\iint_S x dx dy + x dy dz + y dz dx = 9\pi - 3\pi = 6\pi.$$

(2) 设平面 $x + y + z = 1$ 与 x 轴, y 轴和 z 轴的交点分别为 A 、 B 和 C , 对于 $\iint_S xz dx dy$, 由面 AOC 和面 BOC 垂直于 Oxy 面, 故 $\iint_{\triangle AOC} xz dx dy = \iint_{\triangle BOC} xz dx dy = 0$, 从而有 $\iint_S xz dx dy = \iint_{\triangle AOB} xz dx dy + \iint_{\triangle ABC} xz dx dy = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x \cdot 0 dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x \cdot (1-x-y) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} x(1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{24}$, 根据对称性, 原式 $= \frac{1}{8}$.

(3) 方法一 S 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos\theta \sin\varphi \\ y = a \sin\theta \sin\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \\ z = a \cos\varphi \end{cases}$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = -a^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

对于 $\iint_S z^3 dx dy$, 将 S 分为上半球面 S_1 的上侧, 下半球面 S_2 的下侧, 则

$$\begin{aligned} \iint_S z^3 dx dy &= \iint_{S_1} z^3 dx dy + \iint_{S_2} z^3 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\varphi)^3 \cdot |-a^2\sin\varphi\cos\varphi| d\varphi - \\ &\quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (a\cos\varphi)^3 \cdot |-a^2\sin\varphi\cos\varphi| d\varphi \\ &= 2\pi a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi + 2\pi a^5 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi \\ &= 4\pi a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi = \frac{4}{5}\pi a^5. \end{aligned}$$

由对称性知: $\iint_S x^3 dz dy = \iint_S y^3 dx dz = \frac{4}{5}\pi a^5$. 从而原式 $= \frac{12}{5}\pi a^5$.

方法二 利用高斯公式.

$$\begin{aligned} \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy &= \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz \\ &= 3 \int_0^a dr \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi d\theta = \frac{12}{5}\pi a^5. \end{aligned}$$

【例 6-34】 设某流体的流速为 $v = (k, y, 0)$, 求单位时间内从球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的内部流过球面的流量.

【解】 流量 $Q = \iint_S k dy dz + y dz dx + 0 dx dy$. 利用高斯公式,

$$Q = \iiint_V (0 + 1 + 0) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi.$$

§ 3 各种积分之间的联系

一、基本要求

1. 掌握格林公式、高斯公式、斯托克斯公式, 会用它们计算曲线积分、曲

面积分.

2. 掌握平面曲线积分与路径无关的条件, 会求全微分的原函数.

二、主要概念和结论

1. 格林公式 设 D 是由逐段光滑的闭曲线 L 所围成的平面闭区域, 函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, L 是 D 的取正向的整个边界, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

2. 高斯公式 设 V 是由分片光滑的双侧闭曲面 S 所围成的空间闭区域, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在 V 上有一阶连续偏导数, S 的方向为外侧, 则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

3. 斯托克斯公式 设光滑曲面 S 的边界为光滑曲线 L , 函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在曲面 S 和曲线 L 上有一阶连续偏导数, 则

$$\begin{aligned} & \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \oint_L P dx + Q dy + R dz, \end{aligned}$$

其中 S 的侧和 L 的方向符合右手法则.

为了便于记忆, 常把它写成如下形式:

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \end{aligned}$$

4. 积分与路径无关 设 D 是平面单连通区域, 函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, 则下列四个命题等价:

(1) 对于任一完全属于 D 内的逐段光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P dx + Q dy = 0$;

(2) 对于任一完全属于 D 内的逐段光滑曲线 L , 曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与

路径无关, 而只与曲线 L 的起点和终点有关;

(3) 微分式 $Pdx + Qdy$ 在 D 内是某一个函数 $u(x, y)$ 的全微分;

(4) 等式 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内处处成立.

此定理可以推广到三维空间上.

三、常用解题方法与典型问题

【例 6-35】 应用格林公式计算下列积分:

(1) $\oint_L (x^2 + y^3)dx - (x^3 - y^2)dy$, L 为 $x^2 + y^2 = 1$, 取正向;

(2) $\oint_L e^y \sin x dx + e^{-x} \sin y dy$, L 为矩形 $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ 的边界, 取正向.

【解】 (1) $\frac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$, 故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iint_D (-3x^2 - 3y^2) dx dy = -3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = -\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

(2) 应用格林公式

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iint_D (-e^{-x} \sin y - e^y \sin x) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d (-e^{-x} \sin y - e^y \sin x) dy \\ &= \int_a^b [(\cos d - \cos c)e^{-x} - (e^d - e^c)\sin x] dx \\ &= (\cos c - \cos d)(e^{-b} - e^{-a}) + (\cos b - \cos a)(e^d - e^c).\end{aligned}$$

【例 6-36】 利用格林公式计算曲线 $x = a(1 + \cos^2 t)\sin t$, $y = a\sin^2 t \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 所围图形的面积.

【解】 在曲线上, $x dy - y dx = a(1 + \cos^2 t) \sin t d(a\sin^2 t \cos t) - a\sin^2 t \cos t d[a(1 + \cos^2 t)\sin t] = a^2(2\sin^2 t - 3\sin^4 t)dt$.

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2(2\sin^2 t - 3\sin^4 t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi - \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{8}\pi a^2.\end{aligned}$$

【例 6-37】 利用高斯公式求积分 $\iiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中

(1) S 为立方体 $0 \leq x, y, z \leq a$ 的边界曲面, 外侧;

(2) S 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq h)$, 下侧.

【解】 $P = x^2, Q = y^2, R = z^2$.

$$\begin{aligned} (1) \text{ 原式} &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz \\ &= \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (2x + 2y + 2z) dz = \int_0^a dx \int_0^a [(2x + 2y)a + a^2] dy \\ &= \int_0^a [(2ax + a^2)a + a^3] dx = 3a^4. \end{aligned}$$

(2) 设 $\Sigma = S + S_1$, 其中 S_1 为 $z = h (x^2 + y^2 \leq h^2)$ 的上侧, 由高斯公式,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy &= \iiint_V 2(x + y + z) dx dy dz \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r dr \int_r^h (r \cos \theta + r \sin \theta + z) dz = \frac{1}{2} \pi h^4. \end{aligned}$$

而 $\iint_{S_1} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \iint_{S_1} z^2 dx dy = \pi h^4$, 因此

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \frac{1}{2} \pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2} \pi h^4.$$

【例 6-38】 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, 其中

(1) L 为 $x + y + z = 1$ 与三坐标轴的交线, 其方向与所围平面区域上侧构成右手法则;

(2) L 是曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2rx (0 < r < R, z > 0)$, 它的方向与所围曲面的上侧构成右手法则.

$$\begin{aligned} \text{【解】 (1) 原式} &= \iint_S (2y - 2z) dy dz + (2z - 2x) dz dx + (2x - 2y) dx dy \\ &= 3 \iint_{D_{xy}} (2x - 2y) dx dy = 3 \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x - 2y) dy = 0. \end{aligned}$$

(2) 注意到球面的法线的方向余弦为: $\cos \alpha = \frac{x-R}{R}, \cos \beta = \frac{y}{R}, \cos \gamma = \frac{z}{R}$, 故

$$\text{原式} = 2 \iint_S [(y-z)\cos \alpha + (z-x)\cos \beta + (x-y)\cos \gamma] dS$$

$$= 2 \iint_S \left[(y-z) \left(\frac{x}{R} - 1 \right) + (z-x) \frac{y}{R} + (x-y) \frac{z}{R} \right] dS = 2 \iint_S (z-y) dS,$$

而 $\iint_S y dS = \iint_S R \cos \beta dS = R \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 0$ (S 关于 xOy 平面对称), $\iint_S z dS = \iint_S R \cos \gamma dS = R \pi r^2$. 故原式 $= 2\pi R r^2$.

【例 6-39】 设 L 为平面上闭曲线, l 为平面上任意固定方向, 证明

$$\oint_L \cos(n, l) ds = 0,$$

其中 n 是 L 的外法线方向.

【证明】 不妨取 L 的方向为逆时针, 以 τ 表示 L 任一点处的切向量, 且 τ 和 L 方向一致, 记 $\gamma = (n, l)$, $\alpha = (l, x)$, $\beta = (n, x)$, 则 $\gamma = \alpha - \beta$, $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, 而 $\sin \alpha = \sin \left[(\tau, x) - \frac{\pi}{2} \right] = -\cos(\tau, x)$, $\cos \beta = \cos \left[(\tau, x) - \frac{\pi}{2} \right] = \sin(\tau, x)$, 且 $\cos(\tau, x) = \frac{dx}{ds}$, $\sin(\tau, x) = \frac{dy}{ds}$. 因此 $\cos \gamma ds = \cos \alpha dy - \sin \alpha dx$. 由格林公式, $\oint_L \cos(n, l) ds = \oint_L [-\sin \alpha dx + \cos \alpha dy] = \iint_D 0 dx dy = 0$.

【例 6-40】 设 S 是封闭曲面, l 为任意固定方向, 证明

$$\oint_S \cos(n, l) dS = 0.$$

【证明】 设 $l_1^0 = (a, b, c)$ 为 l 方向的单位向量, n_1 是外法线的单位向量, $n_1 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则 $\cos(n, l) = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$, 应用高斯公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \oint_S (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

【例 6-41】 求 $I = \oint_L [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds$, L 为包围有界区域 D 的光滑闭曲线, n 为 L 的外法线方向.

【解】 不妨设 L 取逆时针方向, 切线方向的单位向量为 τ 与 L 一致, 即从 n 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 τ , 则 $(n, x) = (\tau, y)$, $(n, y) = \pi - (\tau, x)$, 故 $\cos(n, x) ds = \cos(\tau, y) ds = dy$, $\cos(n, y) ds = -\cos(\tau, x) ds = -dx$, 因此 $I = \oint_L x dy - y dx = 2S$, 其中 S 表示 D 的面积.

【例 6-42】 证明高斯积分

$$\oint_L \frac{\cos(r, n)}{r} ds = 0,$$

其中 L 是平面上单连通区域 σ 的边界, 而 r 是 L 上一点到 σ 外某一定点的距离, n 是 L 的外法线方向. 又若 r 表示 L 上一点到 σ 内某一定点的距离, 则这个积分之值等于 2π .

【证明】 不妨设平面上某一定点的坐标为 (ξ, η) . 由 $(r, n) = (r, x) - (n, x)$ 得

$$\begin{aligned}\cos(r, n) &= \cos(r, x)\cos(n, x) + \sin(r, x)\sin(n, x) \\ &= \frac{\xi - x}{r} \cos(n, x) + \frac{\eta - y}{r} \sin(n, x),\end{aligned}$$

代入高斯积分, 得

$$\begin{aligned}I &= \oint_L \frac{\cos(r, n)}{r} ds = \oint_L \left[\frac{\eta - y}{r^2} \sin(n, x) + \frac{\xi - x}{r^2} \cos(n, x) \right] ds \\ &= \oint_L \frac{\xi - x}{r^2} dy - \frac{\eta - y}{r^2} dx,\end{aligned}$$

令 $P = -\frac{\eta - y}{r^2}$, $Q = \frac{\xi - x}{r^2}$, $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{r^4} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 若 (ξ, η) 是 σ 外的一点, 则 P, Q 在 σ 上有连续的偏

导数, 并且 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 利用格林公式, $I = 0$.

若点 (ξ, η) 在 σ 内, 在 σ 内以点 (ξ, η) 为圆心, 充分小的 $R > 0$ 为半径作一圆 l , 使得 $l \subset \sigma$, 方向为顺时针方向, 则

$$\oint_{L+l} \frac{\cos(r, n)}{r} ds = I - \oint_l \frac{\cos(r, n)}{r} ds = 0,$$

从而 $I = \oint_l \frac{\cos(r, n)}{r} ds = \oint_l \frac{1}{R} ds = 2\pi$.

【例 6-43】 计算高斯积分

$$\iint_S \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS,$$

其中 S 为简单封闭光滑曲面, n 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 处的外法线方向, $r = |r|$, $r = (\xi - x)i + (\eta - y)j + (\zeta - z)k$. 对下列两种情形进行讨论:

(1) 曲面 S 包围的区域不含 (x, y, z) 点;

(2) 曲面 S 包围的区域含 (x, y, z) 点.

【解】 设法线 n 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

$$\begin{aligned}\cos(r, n) &= \cos(r, x)\cos\alpha + \cos(r, y)\cos\beta + \cos(r, z)\cos\gamma \\ &= \frac{\xi - x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta - z}{r}\cos\gamma\end{aligned}$$

因此, 高斯积分

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\xi - x}{r^3} d\eta d\zeta + \frac{\eta - y}{r^3} d\zeta d\xi + \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta,$$

这里

$$P = \frac{\xi - x}{r^3}, \quad Q = \frac{\eta - y}{r^3}, \quad R = \frac{\zeta - z}{r^3}.$$

于是

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\eta - y)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5}.$$

它们仅在点 (x, y, z) 处不连续, 因此

(1) 当曲面 S 不包围 (x, y, z) 时, $\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0$, 由高斯公式有

$$\iint_S \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS = 0;$$

(2) 当曲面 S 包围 (x, y, z) 时, 则以点 (x, y, z) 为中心, ϵ 为半径作一球 V_ϵ 包围在 S 内, 此球面记以 S_ϵ , 将高斯公式用于 $V - V_\epsilon$ 上, 即得

$$\iint_{S \cup S_\epsilon} \frac{\cos(r, n)}{r^3} dS = 0.$$

因

$$\iint_{S_\epsilon} \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS = \iint_{S_\epsilon} \left(-\frac{1}{\epsilon^2} \right) dS = -4\pi,$$

故得

$$\iint_S \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS = 4\pi.$$

【例 6-44】 利用高斯公式变换积分

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是曲面的外法线方向余弦.

【解】

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz \\ &= \iint_S \frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \frac{\partial u}{\partial y} dx dz + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy.\end{aligned}$$

【例 6-45】 计算下列曲面积分:

(1) $\iint_S (x + \cos y) dy dz + (y + \cos z) dz dx + (z + \cos x) dx dy$, S 是立体 Ω

的边界面外侧, 而立体 Ω 由 $x + y + z = 1$ 和三坐标面围成;

(2) $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, 其中 $\mathbf{F} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$, \mathbf{n} 是 S 的外法向, S 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 上侧.

【解】 (1) 由高斯公式,

$$\text{原式} = \iiint_V (1+1+1) dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = \frac{1}{2}.$$

(2) 设 S_1 为 $z=0 (x^2 + y^2 \leq a^2)$ 的下侧, 记 $\Sigma = S + S_1$, V 是 Σ 所包围的立体, 则

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{S_1} (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS = \iint_{S_1} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS \\ &= \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 r^2 \sin \varphi dr = \frac{6}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

【例 6-46】 证明由曲面 S 所包围的体积等于

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

【证明】 由高斯公式,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS &= \frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \frac{1}{3} \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz = V. \end{aligned}$$

【例 6-47】 若 L 是平面 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ 上的闭曲线, 它所包围区域的面积为 S , 求

$$\oint_L \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

其中 L 依正向进行.

【解】 由斯托克斯公式,

$$\text{原式} = \oint_L (z \cos \beta - y \cos \gamma) dx + (x \cos \gamma - z \cos \alpha) dy + (y \cos \alpha - x \cos \beta) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S 2\cos\alpha dydz + 2\cos\beta dzdx + 2\cos\gamma dxdy \\
&= \iint_S 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) dS = 2S.
\end{aligned}$$

【例 6-48】 设 P, Q, R 有连续偏导数, 且对任意光滑闭曲面 S , 有

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = 0.$$

证明

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

【证明】 用反证法. 假设 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \neq 0$, 不妨设 $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} > 0$. 根据连续函数的性质, 存在闭区域 V_0 , 使

得 $(x_0, y_0, z_0) \in V_0$, 且 $\forall (x, y, z) \in V_0$, 都有 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} > 0$. 则

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{V_0} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz > 0,$$

其中 S 是 V_0 的外表面, 矛盾.

【例 6-49】 验证下列积分与路径无关, 并求它们的值:

- (1) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$ 沿在右半平面的路径;
- (2) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$, 其中 φ, ψ 为连续函数;
- (3) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2dy - z^3dz$.

【解】 (1) $P = \frac{y}{x^2}, Q = \frac{1}{x}$, 当 $x > 0$ 时, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 从而积分与路径无关, 故

$$\text{原式} = \int_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(\frac{-y}{x}\right) = \frac{-y}{x} \bigg|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{2}{3}.$$

(2) 令 $F(x, y) = \int_2^x \varphi(u)du + \int_1^y \psi(v)dv$, 则 $F'_x(x, y) = \varphi(x)$, $F'_y(x, y) = \psi(y)$, 并且这些偏导数是连续的, 因此 $F(x, y)$ 可微, 且

$$dF(x, y) = F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy = \varphi(x)dx + \psi(y)dy,$$

故积分与路径无关,

$$\text{原式} = F(x, y) \bigg|_{(2,1)}^{(1,2)} = \left(\int_2^x \varphi(u)du + \int_1^y \psi(v)dv \right) \bigg|_{(2,1)}^{(1,2)}$$

$$= \int_2^1 \varphi(u) du + \int_1^2 \psi(v) dv.$$

(3) 由于 $d\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4\right) = xdx + y^2dy - z^3dz$, 故此积分与路径无关,

$$\text{原式} = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4\right) \Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} = -\frac{7}{12} - 53 = -53\frac{7}{12}.$$

【例 6-50】 求下列全微分的原函数:

$$(1) (2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy;$$

$$(2) \frac{a}{z}dx + \frac{b}{z}dy + \frac{-by - ax}{z^2}dz.$$

【解】 (1) 设 $P(x, y) = 2x\cos y - y^2\sin x$, $Q(x, y) = 2y\cos x - x^2\sin y$. 易知 P, Q 在全平面上有连续的偏导数, 且 $\frac{\partial P}{\partial y} = -2x\sin y - 2y\sin x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 因此积分与路径无关.

$$\begin{aligned} \text{方法一} \quad \text{原式} &= (2x\cos y dx - x^2\sin y dy) + (-y^2\sin x dx + 2y\cos x dy) \\ &= d(x^2\cos y) + d(y^2\cos x) = d(x^2\cos y + y^2\cos x), \end{aligned}$$

故

$$u(x, y) = x^2\cos y + y^2\cos x + C.$$

$$\begin{aligned} \text{方法二} \quad u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy + C \\ &= \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2y\cos x - x^2\sin y)dy + C \\ &= x^2\cos y + y^2\cos x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad u(x, y, z) &= \int_1^x P(x, 1, 1)dx + \int_1^y Q(x, y, 1)dy + \int_1^z R(x, y, z)dz + C_1 \\ &= \int_1^x a dx + \int_1^y b dy + \int_1^z \frac{-by - ax}{z^2} dz + C_1 \\ &= \frac{ax + by}{z} + C, \text{ 其中 } C = C_1 - a - b. \end{aligned}$$

【例 6-51】 求 $I = \oint_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是不经过原点的简单闭曲线, 取正向. 设 L 围成的区域为 D .

(1) D 不包含原点;

(2) D 包含原点在其内部.

【解】 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

(1) D 不包含原点时, 由格林公式, $I = 0$;

(2) D 包含原点时, 以原点为圆心, 充分小的正数 ϵ 为半径作圆 l , 使得 l

完全包含在 D 的内部, 取逆时针方向, 则

$$\begin{aligned} I &= \left(\oint_L + \oint_{l_1} \right) \left(\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \right) - \oint_{l_1} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = 0 + \oint_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \oint_L x dx + y dy = 0. \end{aligned}$$

【例 6-52】 求

$$I = \oint_L \left[\frac{y}{(x-2)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+2)^2} \right] dx + \left[\frac{2-x}{(2-x)^2 + y^2} + \frac{-(2+x)}{(2+x)^2 + y^2} \right] dy,$$

其中 L 是不经过 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$ 点的简单闭曲线.

【解】 设 L 围成的区域为 D .

① 若 D 不含 $(-2, 0)$, $(2, 0)$, 由于

$$P = \frac{y}{(x-2)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+2)^2 + y^2}, \quad Q = \frac{2-x}{(2-x)^2 + y^2} + \frac{-(2+x)}{(2+x)^2 + y^2},$$

$$\text{则 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-2)^2 - y^2}{[(x-2)^2 + y^2]^2} + \frac{(x+2)^2 - y^2}{[(x+2)^2 + y^2]^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ 由格林公式有 } I = 0;$$

② 若 D 不含 $(-2, 0)$, 而含 $(2, 0)$, 则 $I = 2\pi$ (正向) 或 -2π (负向);

③ 若 D 不含 $(2, 0)$, 而含 $(-2, 0)$, 则 $I = 2\pi$ (负向) 或 -2π (正向);

④ 若 D 既含 $(2, 0)$ 又含 $(-2, 0)$, 则 $I = 4\pi$ (负向) 或 -4π (正向).

【例 6-53】 设 $u(x, y)$ 在单连通区域 D 上有二阶连续偏导数, 证明在 D

$$\text{内 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ 的充要条件是对 } D \text{ 内的任一光滑闭曲线 } L, \text{ 都有 } \oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds =$$

0, 其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 L 沿外法线方向的方向导数.

【证明】 必要性. 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos(n, y),$$

$$\text{又 } \cos(n, x) ds = dy, \cos(n, y) ds = -dx,$$

$$\text{故 } \oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = 0.$$

$$\text{充分性. 由 } \oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \text{ 即 } \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = 0, \text{ 于是 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

【例 6-54】 计算积分

$$I = \int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2},$$

其中 L 是从点 $A(-1, 0)$ 到 $B(1, 0)$ 的一条不通过原点的光滑曲线, 它的方程是 $y = f(x) (-1 \leq x \leq 1)$.

【解】 令 $P(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = -\frac{x-y}{x^2+y^2}$, 则 P 和 Q 的定义域为 $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, P, Q 在 D 有连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 又因 L 不过原点, 故 $f(0) > 0$ 或 $f(0) < 0$. 若 $f(0) > 0$, 则 L 上的积分等于沿单位圆 $x^2+y^2=1$ 上半圆周 l 从 A 到 B 的积分, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_l \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} \\ &= \int_{\pi}^0 [(\cos\theta + \sin\theta)(-\sin\theta) - (\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta] d\theta = \pi. \end{aligned}$$

同理若 $f(0) < 0$, 有 $I = -\pi$. 因此 $I = \begin{cases} \pi, & f(0) > 0 \\ -\pi, & f(0) < 0 \end{cases}$.

§ 4 综合例题

【例 6-55】 计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$, 其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

分析 本题考查空间第二型曲线积分的计算. 已给的空间曲线若化为参数形式, 应分段计算, 给计算带来复杂性. 当然想到用斯托克斯公式.

【解】 记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧, D 为 S 在 Oxy 坐标面上的投影, $D = \{(x, y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$, 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 2y)dxdy \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (4x + 2y + 3z)dS = -2 \iint_D (x - y + 6)dxdy = -12 \iint_D dxdy \\ &= -24. \end{aligned}$$

【例 6-56】 (复旦大学 1999 年) 计算 $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, S 是曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 沿曲面的下侧.

【解】 设 S_1 为 $z=1 (x^2+y^2 \leq 1)$ 取上侧, 则

$$\text{原式} = \oint_{S+S_1} - \iint_{S_1} = 2 \iiint_{\Omega} (x+y+z)dxdydz - \iint_{S_1} dxdy$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 (r \cos \theta + r \sin \theta + z) dz - \pi \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{2}{5} \right) d\theta - \pi = \frac{8}{5} \pi - \pi = \frac{3}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

【例 6-57】 (复旦大学 1998 年) 设 L 是单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 沿逆时针方向, 求积分

$$\int_L \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2 + 4y^2}.$$

【解】 设 l 为 $x^2 + 4y^2 = \varepsilon^2$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$), 沿顺时针方向, 则原式 = $\oint_{L+l} + \int_{-l} = I_1 + I_2$. 由格林公式, $I_1 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$. 令 $x = \varepsilon \cos \theta$, $y = \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta$, 则

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{-l} \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2 + 4y^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon \left(\varepsilon \cos \theta - \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta \right) \sin \theta + (\varepsilon \cos \theta + 2\varepsilon \sin \theta) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cos \theta}{\varepsilon^2} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.
 \end{aligned}$$

故原式 = $I_1 + I_2 = 2\pi$.

【例 6-58】 (复旦大学 2000 年) 计算积分 $\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}.$$

【解】 作变换 $T^{-1}: u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$, 则 $x = u^2, y = v^2$, 且 D 在 T^{-1} 下变成了 $\Delta = \{(u, v) \mid u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}$, $|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 4|uv|$, 故

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{\Delta} (u + v) \cdot 4uv du dv = 4 \int_0^1 du \int_0^{1-u} uv(u + v) dv \\
 &= 4 \int_0^1 \left[\frac{u^2(1-u)^2}{2} + \frac{u(1-u)^3}{3} \right] du \\
 &= \frac{2}{3} \left(\frac{u^5}{5} - u^3 + u^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}.
 \end{aligned}$$

【例 6-59】 (南开大学 1999 年) 计算积分 $I = \int_{\widehat{AB}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$, 其中 \widehat{AB} 是从 $A(0, -1)$ 到 $B(0, 1)$ 的右半单位圆周.

【解】 记 \overline{BA} 为从 $A(0, -1)$ 到 $B(0, 1)$ 的有向线段, 则

$$I = \oint_{\widehat{AB} + \overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} = \oint_{\widehat{AB} + \overline{BA}} + \int_{\overline{AB}} = I_1 + I_2,$$

由格林公式

$$I_1 = \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + m) dx dy = m \iint_D dx dy = \frac{1}{2} m \pi.$$

而

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\overline{AB}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy \\ &= \int_{-1}^1 (\cos y - m) dy = 2(\sin 1 - m). \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{m\pi}{2} + 2\sin 1 - m.$$

【例 6-60】 (大连理工大学 2000 年) 计算曲面积分

$$I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy,$$

其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧.

【解】 由高斯公式, $I = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, 其中 Ω 为封闭曲面 S 所围的区域. 令

$$x = ar \sin \varphi \cos \theta, \quad y = br \sin \varphi \sin \theta, \quad z = cr \cos \varphi.$$

则

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right| = abcr^2 \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 a^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta abcr^2 \sin \varphi dr \\ &= a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = a^3 bc \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} a^3 bc \pi. \end{aligned}$$

由对称性知,

$$I_2 = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \frac{4}{15} ab^3 c \pi, \quad I_3 = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \frac{4}{15} abc^3 \pi,$$

故 $I = 3(I_1 + I_2 + I_3) = 3 \cdot \frac{4}{15} abc \pi (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{4}{5} abc \pi (a^2 + b^2 + c^2).$

【例 6-61】 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续. 证明

$$\iint_{\substack{x+y \leq a \\ x \geq 0, y \geq 0}} f(x+y) dx dy = \int_0^a x f(x) dx.$$

【证明】 作变换 $u = x + y, v = x - y$, 则区域 $x + y \leq a, x \geq 0, y \geq 0$ 在此变换下变为由 $u = a, u = v, u = -v$ 围成的区域 D , 且 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}$, 故

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x+y \leq a \\ x \geq 0, y \geq 0}} f(x+y) dx dy &= \iint_D f(u) |J| du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_D f(u) du dv = \frac{1}{2} \int_0^a du \int_{-u}^u f(u) dv = \int_0^a u f(u) du. \end{aligned}$$

【例 6-62】 (厦门大学 2001 年) 计算 $I = \oint_C (y+z) dx + z dy + y dz$, 其中 C 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = Rx (R > 0)$ 的交线从 z 轴正向去看按逆时针方向.

【解】 $P = y + z, Q = z, R = y$, 由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_S dz dx - dx dy, \end{aligned}$$

其中 S 为 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. 由于 S 在 Oxy 平面上的投影为 $D_{xy}: \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, 故 $\iint_S dx dy = \frac{\pi R^2}{4}$. 由对称性知, $\iint_S dz dx = 0$. 故 $I = -\frac{\pi R^2}{4}$.

【例 6-63】 (西安交大) 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 计算积分

$$\oint_{\Sigma} x^3 dy dz + \left[\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3 \right] dz dx + \left[\frac{1}{y} f\left(\frac{z}{y}\right) + z^3 \right] dx dy,$$

其中 Σ 为 $x > 0$ 的锥面 $y^2 + z^2 - x^2 = 0$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围立体表面外侧.

【解】 记 $P = x^3, Q = \frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3, R = \frac{1}{y} f\left(\frac{z}{y}\right) + z^3$, 由高斯公式,

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) d\Omega = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 r^4 \sin \varphi dr = \frac{93(2-\sqrt{2})}{5} \pi.$$

【例 6-64】 设 $f(x, y) = F'_{xy}(x, y)$, 计算 $I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy$.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】 } I &= \int_a^A F'_x(x, y) \Big|_b^B dx = \int_a^A [F'_x(x, B) - F'_x(x, b)] dx \\
 &= [F(x, B) - F(x, b)] \Big|_a^A \\
 &= F(A, B) - F(A, b) - F(a, B) + F(a, b).
 \end{aligned}$$

【例 6-65】 已知 $F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{xy}{2}} dx dy$, 求 $F'(t)$.

【解】 作变换 $x = t\xi$, $y = t\eta$, 则有

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{xy}{2}} dx dy = t^2 \iint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1}} e^{\frac{\xi\eta}{2}} d\xi d\eta,$$

于是 $F'(t) = 2t \iint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1}} e^{\frac{\xi\eta}{2}} d\xi d\eta = \frac{2}{t} \cdot t^2 \iint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1}} e^{\frac{\xi\eta}{2}} d\xi d\eta = \frac{2}{t} \cdot F(t).$

【例 6-66】 设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 邻域内连续, 且 $f(0, 0) = 1$, 令

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy. \text{ 求 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{t}.$$

【解】 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 则 $F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.
由 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的邻域内连续, 故

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} f(t\cos\theta, t\sin\theta) t d\theta.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(t\cos\theta, t\sin\theta) d\theta = 2\pi f(0, 0) = 2\pi.$$

【例 6-67】 计算曲线积分 $\int_C y^2 ds$, 其中 C 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y + z = a \end{cases}$.

【解】 先求出 C 的参数方程, 把 $y + z = a$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 中得

$$x^2 + 2\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2},$$

由此得 C 的参数方程为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos\theta, \quad y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin\theta, \quad z = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} d\theta,$$

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin\theta \right)^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} d\theta = \frac{a^3}{4\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta) d\theta = \frac{3\pi a^3}{4\sqrt{2}}.$$

第七章 数项级数与函数项级数

级数理论是数学分析的重要组成部分,它与极限理论有着十分密切的关系,是数学分析重要的理论方法之一,是研究函数的有效工具.

§1 数项级数

一、基本要求

1. 掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.
2. 掌握几何级数、 p -级数的收敛与发散的条件.
3. 掌握正项级数收敛性判别法,掌握交错级数的莱布尼茨判别法.
4. 理解一般项级数的绝对收敛、条件收敛的概念,掌握柯西收敛原理、狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

二、主要概念和结论

1. 给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 记 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 称 $\{S_n\}$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 存在, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, S 为其和. 若数列 $\{S_n\}$ 不收敛, 则

称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2. 柯西收敛原理 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^+$, 有 $|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon$.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n_0 > N, p_0 \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$|u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+p_0}| \geq \epsilon_0.$$

3. 级数收敛的必要条件 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

4. 正项级数收敛性判别法 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

(1) 比较判别法: 若对充分大的 n (即 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$), 有 $u_n \leq cv_n$ (或 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$), 其中 $c > 0$ 为常数, 则 (i) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; (ii) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

比较判别法的极限形式 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则

(i) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(ii) 当 $l = 0$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(iii) 当 $l = +\infty$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

(2) 柯西判别法(根值判别法) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ (或 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$), 则当 $l < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当 $l > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 达朗贝尔判别法(比值判别法) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, 则当 $l < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当 $l > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(4) 柯西积分判别法 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 非负, 连续, 单调下降, $u_n = f(n)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(5) 拉阿比判别法 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = S$, 则当 $S > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当 $S < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5. 任意项级数收敛性判别法

(1) 莱布尼茨判别法 设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0, n = 1, 2, \dots$) 中的数列 $\{u_n\}$ 单调下降趋向于 0, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 即绝对收敛的级数必收敛.

(3) 狄利克雷判别法 设 (I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列 $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使得 $|B_n| \leq M (n = 1, 2, \dots)$, (II) 数列 $|a_n|$ 单调趋向于 0, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(4) 阿贝尔判别法 设 (I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, (II) 数列 $|a_n|$ 单调有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

三、常用解题方法与典型例题

【例 7-1】 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 但反之不成立, 举例说明.

【证明】 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 于是 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$, 有 $0 \leq a_n < 1$. 从而, 当 $n > N$ 时, $a_n^2 < a_n$, 由比较判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. 反之不真. 例如: 取 $a_n = \frac{1}{n}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【例 7-2】 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项都是正的, 把级数的项经过组合而得到新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, 即

$U_{n+1} = u_{k_n+1} + u_{k_n+2} + \dots + u_{k_{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots$, 其中 $k_0 = 0, k_0 < k_1 < \dots < k_n < \dots$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛, 证明原来的级数也收敛.

分析 从数列的角度分析其实质. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 的部分和数列分别为 $\{S_n\}$ 和 $\{T_n\}$, 则数列 $\{T_n\}$ 是单调增加数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 若一个单调数列有一个收敛的子数列, 则该数列必收敛. 从而当 $\{T_n\}$ 收敛时, $\{S_n\}$ 必收敛,

即 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

【证明】 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛, 记其和为 S , 设 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 故 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, 使 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{i=1}^{n_0} U_i < S$. 显然 $S_n < S_{n+1}$ 对一切 n 成立, 于是, $\{S_n\}$ 单调上升且有界, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【例7-3】 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $a_{n+1} \leq a_n (n = 1, 2, \dots)$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

分析 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时, a_n 为无穷小量, 本题考察 a_n 趋向于 0 的速度是否比 $\frac{1}{n}$ 快.

【证明】 方法一 由条件知, $\forall n, m \in \mathbb{N}^+, n > m$,

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n < r_m,$$

其中 r_m 为该收敛级数的余和, 由此得 $na_n < \frac{n}{n-m} r_m$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

故 $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}^+$, 使 $r_{m_0} < \varepsilon$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-m_0} = 1$, 故存在正整数

$n_0 (n_0 > m_0)$, 使当 $n \geq n_0$ 时, $\frac{n}{n-m_0} < 2$. 于是 $\forall n \geq n_0$, 有 $0 \leq na_n < 2\varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

方法二 因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 由柯西收敛原理知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} < \varepsilon/2$ 及 $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n+1} < \varepsilon/2$. 因为 $\{a_n\}$ 单调下降, 故 $0 \leq na_n < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

注 (1) 同理可证若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且数列 $\{a_n\}$ 单调, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

(2) 仅由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛不能推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. 例如, 设

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \neq k^2, k = 1, 2, \dots \\ \frac{1}{n}, & n = k^2, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0$.

【例 7-4】若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

【证明】① 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ 收敛, 由于 $|a_n b_n| \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 也收敛. ② 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n b_n$ 收敛. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛, 所以, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2)$ 收敛. ③ 设 $b_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由 ① 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

【例 7-5】已知两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 问 $\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n)$ 两级数的收敛性如何?

【解】 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n)$ 可能收敛也可能发散. 例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2}$ 皆发散, 但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n) = 0 + 0 + \cdots 0 + \cdots$ 收敛. 又如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 皆发散, 但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 也发散. $\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$ 一定发散. 事实上, $\max(u_n, v_n) \geq u_n \geq 0$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$ 发散.

【例 7-6】若数列 $\{na_n\}$ 有极限, $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

【证明】方法一 设 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k-1})$, 通过计算得 $T_n = -a_0 - a_1 - \cdots - a_{n-1} + na_n = -S_{n-1} + na_n$.

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = -\lim_{n \rightarrow \infty} T_n + \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

方法二 因 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 由柯西收敛原理知,
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > m > N_1,$

$|(m+1)(a_{m+1} - a_m) + (m+2)(a_{m+2} - a_{m+1}) + \cdots + n(a_n - a_{n-1})| < \varepsilon,$
 即 $|-(m+1)a_m - a_{m+1} - a_{m+2} - \cdots - a_{n-1} + na_n| < \varepsilon.$ 又数列 $\{na_n\}$ 的极限存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$, 于是, 对上述 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2,$
 有 $|na_n - a| < \varepsilon.$ 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > m > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} & |-(m+1)a_m - a_{m+1} - a_{m+2} - \cdots - a_{n-1} + na_n| \\ &= |-a_m - a_{m+1} - \cdots - a_{n-2} - a_{n-1} + na_n - ma_m| \\ &\geq |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1}| - |na_n - ma_m|, \end{aligned}$$

所以, $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1}| < \varepsilon + |na_n - ma_m| \leq \varepsilon + |na_n - a| + |ma_m - a| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$ 由柯西收敛原理知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

注 (1) 由证明过程可知, 在数列 $\{na_n\}$ 有极限的条件下, $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 同理可证若数列 $\{na_n\}$ 有极限, $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

(3) 特别有(见例 7-48), 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$ 由例 7-3 的注(1)可知, 条件可改为:
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且数列 $\{a_n\}$ 单调, 结论仍成立.

【例 7-7】 求证若 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

【证明】 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 绝对收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛, 从而

$a_{n+1} - a_1 \rightarrow A$, 所以 $\{a_n\}$ 有界, 设 $|a_n| \leq M$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 由柯西收敛原理

知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^+$, 有 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{1+M}$,

$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k - a_{k+1}| < 1$. 记 $S_{n+i} = \sum_{k=n+1}^{n+i} b_k (i = 1, 2, \dots, p)$, 则

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &= |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \dots + a_{n+p}b_{n+p}| \\ &= |S_{n+1}a_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1})a_{n+2} + \dots + (S_{n+p} - S_{n+p-1})a_{n+p}| \\ &= |S_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + S_{n+p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + S_{n+p}a_{n+p}| \\ &\leq |S_{n+1}| |a_{n+1} - a_{n+2}| + \dots + |S_{n+p-1}| |a_{n+p-1} - a_{n+p}| + \\ &\quad |S_{n+p}| |a_{n+p}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1+M} \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_{n+p}| \right) \leq \frac{\varepsilon}{1+M} (1+M) = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

【例 7.8】 利用柯西收敛原理判别下列级数的敛散性:

(1) $a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_n q^n + \dots, |q| < 1, |a_n| \leq A (n = 0, 1, 2, \dots)$;

(2) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$.

【解】 (1) $\forall p \in \mathbb{N}^+$, 有

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= |a_n q^n + a_{n+1} q^{n+1} + \dots + a_{n+p-1} q^{n+p-1}| \\ &\leq A(|q|^n + |q|^{n+1} + \dots + |q|^{n+p-1}) \\ &= A|q|^n(1 + |q| + |q|^2 + \dots + |q|^{p-1}) \\ &= A|q|^n(1 - |q|^p)/(1 - |q|) < \frac{A}{1 - |q|} |q|^n. \end{aligned}$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{\ln M \varepsilon}{\ln |q|} \right\rceil + 1$, 其中 $M = \frac{1 - |q|}{A}$, 则当 $n > N$ 时,

$\forall p \in \mathbb{N}^+$, 都有 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. 由柯西收敛原理知, 原级数收敛.

(2) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 取 $n_0 = 3N$, $p_0 = 3n_0$, 这时 $n_0 > N$, 而

$$\begin{aligned} |S_{n_0+p_0} - S_{n_0}| &= \left| \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} - \frac{1}{n_0+3} + \frac{1}{n_0+4} + \frac{1}{n_0+5} - \frac{1}{n_0+6} + \dots + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4n_0-2} + \frac{1}{4n_0-1} - \frac{1}{4n_0} \right| \end{aligned}$$

$$> \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+4} + \cdots + \frac{1}{4n_0-2} \geq \frac{n_0}{4n_0} = \frac{1}{4} = \epsilon_0,$$

由柯西收敛原理知, 原级数发散.

【例 7.9】 对数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 定义 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $\Delta b_k = b_{k+1} - b_k$, 求证:

(1) 如果 $\{S_n\}$ 有界, $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n|$ 收敛, 且 $b_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛,

且有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = - \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \Delta b_n$;

(2) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n|$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

【证明】 (1) 设 $\{S_n\}$ 有界, 则 $\exists M > 0, |S_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^+$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+1} - b_n|$ 收敛, 且 $b_n \rightarrow 0$, 故 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^+$, 有 $\sum_{k=n+1}^{n+p} |b_{k+1} - b_k| < \frac{\epsilon}{3M}, |b_n| < \frac{\epsilon}{3M}$. 于是

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &= |a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| \\ &= |(S_{n+1} - S_n) b_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1}) b_{n+2} + \cdots + (S_{n+p} - S_{n+p-1}) b_{n+p}| \\ &= |-S_n b_{n+1} + S_{n+1} (b_{n+1} - b_{n+2}) + \cdots + S_{n+p-1} (b_{n+p-1} - b_{n+p}) + S_{n+p} b_{n+p}| \\ &\leq |S_n b_{n+1}| + [|S_{n+1} (b_{n+1} - b_{n+2})| + \cdots + |S_{n+p-1} (b_{n+p-1} - b_{n+p})|] + |S_{n+p} b_{n+p}| \\ &< M \cdot \frac{\epsilon}{3M} + M \cdot \frac{\epsilon}{3M} + M \cdot \frac{\epsilon}{3M} = \epsilon, \end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = - \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \Delta b_n$.

(2) 证明完全类似于例 7.7.

【例 7.10】 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

【证明】 方法一 $\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists k \in \mathbb{N}^+$, 使得 $2^k \leq n < 2^{k+1}$. 故

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \\
&\quad \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) \\
&\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \\
&\quad \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) = \frac{k+1}{2},
\end{aligned}$$

从而 $|S_n|$ 无上界, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

方法二 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 取 $n_0 = N+1$, $p_0 = n_0$, 这时 $n_0 > N$, 而

$$|S_{n_0+p_0} - S_{n_0}| = \left| \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0} \right| \geq \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

由柯西收敛原理知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

方法三 由拉格朗日中值定理, $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+\theta} < \frac{1}{n}$ ($0 < \theta < 1$). 从而 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1) \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 由定义知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

【例 7-11】 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx \quad (|r| < 1).$$

分析 适当选取 a , 利用 S_n 和 aS_n 的组合, 建立关于 S_n 的方程, 求出 S_n , 再求 S_n 的极限.

$$\begin{aligned}
\text{【解】} \quad (1) \quad S_n &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n}, \\
2S_n &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}, \\
S_n &= 2S_n - S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) / \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{2n-1}{2^n},
\end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和为 3.

$$(2) S_n = \sum_{k=1}^n r^k \cos kx, \quad 2r \cos x S_n = \sum_{k=1}^n 2r^{k+1} \cos x \cos kx,$$

$$\begin{aligned} 2r \cos x S_n &= \sum_{k=1}^n r^{k+1} [\cos(k+1)x + \cos(k-1)x] \\ &= [r^{n+1} \cos(n+1)x + S_n - r \cos x] + \\ &\quad [r^2 + r^2 S_n - r^{n+2} \cos nx], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } S_n &= \frac{r^{n+2} \cos nx - r^{n+1} \cos(n+1)x + r \cos x - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} \rightarrow \\ &\quad \frac{r \cos x - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$ 的和为 $\frac{r \cos x - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x}$.

类似可得, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx$ ($|r| < 1$) 的和是 $\frac{r \sin x}{1 + r^2 - 2r \cos x}$.

【例 7-12】 讨论下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{\ln n}}; \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}; \quad (6) \frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \cdots;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}; \quad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0).$$

【解】 (1) $(\ln n)^{\ln n} = n^{\ln \ln n}$, 当 n 充分大时, $\frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$, 由比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

(2) 由于 $\frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n^2}{n^n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^n}$ 收敛, 由比较判别法知,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$ 收敛.

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}}{2^n \frac{\pi}{3^n}} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\pi}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ 收敛, 由比较判别法之极}$$

限形式知, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^{\ln n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3^{\frac{\ln n}{n}}} = 2 > 1, \text{ 由柯西判别法知, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{\ln n}} \text{ 发散.}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1, \text{ 由达朗贝尔判别法知, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \text{ 发散.}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)(3n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+3} = \frac{3}{2} < 1, \text{ 由达朗贝尔判别法知, 级数 } \frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \cdots \text{ 收敛.}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n \sqrt[n]{n}} / \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n \cdot \frac{1}{n}} = 1, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \text{ 发散.}$$

$$(8) \text{ 当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = 1 \neq 0, \text{ 由级数收敛的必要条件知, 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \text{ 发散; 当 } a = 1 \text{ 时, 级数为 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}, \text{ 显然发散; 当 } a > 1 \text{ 时, } \frac{1}{1+a^n} < \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ 收敛, 由比较判别法知, 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \text{ 收敛.}$$

【例 7-13】 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$ 的收敛性.

$$\text{【解】 取 } f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}, \text{ 它在 } [9, +\infty) \text{ 非负, 单调下降, 连续.}$$

$$f(n) = \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}, \text{ 又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_9^x \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln \ln \ln x - \ln \ln \ln 9) = +\infty, \text{ 由柯西积分判别法知, } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n} \text{ 发散.}$$

【例 7.14】 讨论下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{3^n}.$$

【解】 (1) $\sin(\pi \sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2+1} - n\pi) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}$, 数列 $u_n = \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}$ 单调下降趋向于 0, $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

$|\sum_{k=1}^n (-1)^k| \leq 1$, 由狄利克雷判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1})$ 收敛.

(2) 由于 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^n$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ 收敛.

【例 7.15】 讨论下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \sin \frac{n\pi}{2}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n} (a > 0).$$

【解】 (1) 令 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n \cdot \sin n^2$, 则 $|a_n|$ 单调下降趋于 0, 且 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $|\sum_{k=1}^n b_k| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [\cos k(k-1) - \cos k(k+1)] \right| = \left| \frac{1}{2} [\cos 0 - \cos n(n+1)] \right| \leq 1$, 由狄利克雷判别法知, 原级数收敛.

(2) 令 $a_n = \frac{1}{3^n}$, $b_n = \sin \frac{n\pi}{2}$, 则

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| = \left| \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi + \sin \frac{3\pi}{2} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{2} \right| \leq 1.$$

又数列 $|a_n|$ 单调趋向于 0, 由狄利克雷判别法知, 原级数收敛.

(3) 令 $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $a_n = \frac{a}{1+a^n} (a > 0)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且数列 $|a_n|$ 单调有界, 由阿贝尔判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n} (a > 0)$ 收敛.

【例 7.16】 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调上升且有上界, 求证 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 收敛.

【证明】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}$. 又 $\{x_n\}$ 单调上升有上界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 收敛. 而 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 单调下降有界, 由阿贝尔判别

法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 收敛.

【例 7-17】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 的收敛性(绝对或条件收敛).

【解】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} / \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散, 根据比较判别法的极限形式, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right|$ 发散. 已知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 收敛, 而数列 $\left\{ \frac{n+2}{n+1} \right\} = \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} \right\}$ 单调下降有下界. 由阿贝尔判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 收敛. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 条件收敛.

【例 7-18】 判断下列级数的收敛性(绝对或条件收敛):

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}.$$

【解】 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}} / \frac{1}{n^p} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, ① 当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 绝对收敛; ② 当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散; ③ 当 $0 < p \leq 1$ 时, 将通项改写为 $\frac{(-1)^n}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛, 而 $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right\}$ 单调上升 ($n > 4$) 且趋于 1, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 收敛. 但因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散, 故当 $0 < p \leq 1$ 时, 原级数条件收敛.

(2) 令 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2} \sin x)^2}{\sqrt[n]{n}} = (\sqrt{2} \sin x)^2$, 故 ① 当 $\sqrt{2} \sin^2 x < 1$, 即当 $|x - n\pi| < \frac{\pi}{4}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛; ② 当 $\sqrt{2} \sin^2 x = 1$, 即当 $|x - n\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 条件收敛; ③ 当 $\sqrt{2} \sin^2 x > 1$ 时, 可选取 a , 使 $\sqrt{2} \sin^2 x > a > 1$. 当 n 充分大时, 有 $\sqrt[n]{|a_n|} \geq a$ 或 $|a_n| \geq a^n > 1$, 上式表明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 不趋于 0, 故此时原级数发散.

【例 7-19】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 的收敛性.

【解】 将通项改写为 $(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = (-1)^n \frac{1}{2n} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$ 收敛. 下面证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 也收敛. 事实上, 其部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\cos 2k}{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{\cos 2k}{2k} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{2\cos 4k}{4k} = S_n^{(1)} - S_n^{(2)}.$$

但级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 4k}{2k}$ 均收敛, 记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 与 $S^{(2)}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S^{(1)} - S^{(2)}$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

【例 7-20】 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} (p > 0)$.

【解】 (1) 由公式 $e^x = 1 + x + o(x) (x \rightarrow 0)$ 知

$$a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} + o\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right),$$

于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \frac{\ln n}{n^2+1} = 1$. 因此由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1}$ 的收敛性知 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$ 收敛.

(2) 方法一 设 $a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p$, 则 $a_n > 0$. 由于 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = e^{n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]}$, 故 $a_n = \left[e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \right) \right]^p = e^p \left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p$. 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \frac{1}{n^p} = \frac{e^p}{2^p}$. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

方法二 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\frac{1}{n}} = \frac{e}{2}$.

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \frac{1}{n^p} = \frac{e^p}{2^p}$. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 发散.

$$\begin{aligned} (3) a_n &= \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} = \frac{(-1)^n}{n^p \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^p} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} \left[1 - \frac{p \cdot (-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right). \end{aligned}$$

① 当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$ 均绝对收敛, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}$ 条件收敛; ② 当 $p > 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| / \frac{1}{n^p} = 1$, 知原级数绝对收敛. 综上所述, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛, 当 $p > 1$ 时绝对收敛.

【例 7-21】 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$ 的敛散性.

【解】 令 $h = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+p} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{e} \frac{(1+h)^p (1+h)^n - e}{h} \\ &= \frac{1}{e} \frac{(1+h)^p [(1+h)^{\frac{1}{h}} - e]}{h} + \frac{(1+h)^p - 1}{h} \\ &= \frac{1}{e} (1+h)^p \cdot \frac{[(1+h)^{\frac{1}{h}} - e]}{h} + \frac{(1+h)^p - 1}{h}. \end{aligned}$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, $(1+h)^p \rightarrow 1$, $\frac{[(1+h)^{\frac{1}{h}} - e]}{h} \rightarrow -\frac{e}{2}$, $\frac{(1+h)^p - 1}{h} \rightarrow p$, 故

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p - \frac{1}{2}$. 由拉阿比判别法知, 当 $p > \frac{3}{2}$ 时, 级数收敛; 当

$p < \frac{3}{2}$ 时级数发散; 当 $p = \frac{3}{2}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{3}{2}}}$. 因为 $\frac{a_n}{a_{n+1}} =$

$$\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{e} \cdot e^{\left(n+\frac{1}{2}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} \cdot e^{\left(n+\frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} = e^{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

由高斯判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 发散.

§2 函数项级数

一、基本要求

1. 理解函数序列与函数项级数的一致收敛的概念.
2. 掌握函数项级数一致收敛性判别法.
3. 掌握和函数的分析性质.

二、主要概念和结论

1. 一致收敛的定义 设函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 与 $f(x)$ 都在区间 I 有定义. 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall x \in I$, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 $f(x)$. 它有等价叙述: 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 $f(x) \Leftrightarrow$ 数列 $\rho_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 其中 $\rho_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 不一致收敛于 $f(x) \Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n_0 > N$, 及 $x_0 \in I$, 满足 $|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$.

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 n 项部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 $S(x)$, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于和函数 $S(x)$. 用 $\epsilon - N$ 语言叙述为: 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall x \in I$, 有 $\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right| < \epsilon$, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于和函数 $S(x)$. 它有等价叙述: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于 $S(x) \Leftrightarrow$ 数列 $\rho_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 其中 $\rho_n = \sup_{x \in I} |R_n(x)| = \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)|$.

2. 柯西收敛原理 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$,

$\exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^+, \forall x \in I$, 有 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \epsilon$.

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 不一致收敛 $\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n_0$

$> N, p_0 \in \mathbb{N}^+$, 及 $x_0 \in I$, 满足 $\left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} u_k(x_0) \right| \geq \epsilon_0$.

3. 一致收敛性判别法

(1) M -判别法 (魏尔斯特拉斯判别法) 设在区间 I 上 $|u_n(x)| \leq M_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛.

(2) 狄利克雷判别法 设 (I) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和函数序列 $\left\{ \sum_{k=1}^n b_k(x) \right\}$ 在区间 I 一致有界, 即 $\exists M > 0, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 有 $\left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq M$; (II) 对每个固定的 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 是单调数列; (III) $\{a_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 0. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 一致收敛.

(3) 阿贝尔判别法 (I) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在区间 I 一致收敛; (II) $\{a_n(x)\}$ 在区间 I 一致有界; (III) 对每个固定的 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 是单调数列. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 一致收敛.

4. 和函数的分析性质

(1) 和函数的连续性 若 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在区间 I 连续, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于 $S(x)$, 则和函数 $S(x)$ 在区间 I 连续.

(2) 逐项积分 若 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $[a, b]$ 连续, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 $S(x)$, 则 $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$.

(3) 逐项求导 若 $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 在区间 I 有连续的微商 $u'_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 逐点收敛于 $S(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于 $\sigma(x)$, 则 $S(x)$ 在区间 I 可导, 且 $S'(x) = \sigma(x)$, 即 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

三、常用解题方法与典型例题

【例 7-22】 (大连理工大学 2000 年) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛, 但在 $[\delta, +\infty)$ 一致收敛, 这里 δ 是任意正数.

【证明】 由于 $\rho_n = \sup_{x \in (0, +\infty)} u_n(x) = \sup_{x \in (0, +\infty)} n e^{-nx} \geq u_n\left(\frac{1}{n}\right) = n e^{-1} \neq 0$, 故 $|u_n(x)|$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛于 0. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛. $\forall x \in [\delta, +\infty)$, 当 n 充分大时, 有 $0 < n e^{-nx} \leq n e^{-n\delta} \leq \frac{1}{n^2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由 M -判别法知, 该级数在 $[\delta, +\infty)$ 一致收敛.

注 证明一致收敛性的主要方法:

(1) 先求极限函数或和函数, 然后按定义证明.

(2) 应用等价叙述, 考察数列 ρ_n 是否趋于 0, 其中 $\rho_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ 或 $\rho_n = \sup_{x \in I} |R_n(x)| = \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)|$.

(3) 用三个基本判别法: M -判别法, 狄利克雷判别法, 阿贝尔判别法.

(4) 一致收敛性的柯西原理.

(5) 利用结论: 若 $|u_n(x)|$ 在区间 I 不一致收敛于 0, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 不一致收敛.

【例 7-23】 讨论函数序列 $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一致收敛性.

【解】 $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-nx})}{n} = 0$; $\forall x \in (-\infty, 0)$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}) = -x$. 故 $f(x) =$

$$\begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

① 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $\rho_n = \sup_{x \in [0, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty)} \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx})$, 由于当 $x \geq 0$, $0 \leq \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}) \leq \frac{1}{n} e^{-nx} = \frac{1}{n e^{nx}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 所以 $\rho_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

② 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}) + x = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}) + \frac{1}{n} \ln e^{nx} = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})$, 故 $g(x) > 0$, 且 $g'(x) = \frac{1}{n} \frac{n e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{e^{nx}}{1 + e^{nx}} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调上升, 从而 $0 < g(x) < g(0) = \frac{1}{n} \ln 2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 故 $\rho_n = \sup_{x \in (-\infty, 0)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (-\infty, 0)} g(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 从而 $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛于 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

【例 7-24】 讨论下列函数列的一致收敛性:

(1) $f_n(x) = \arctan nx$ ($0 < x < \infty$);

(2) $f_n(x) = x \arctan nx$ ($0 < x < \infty$).

【解】 (1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}$ ($0 < x < +\infty$). 但 $f_n(x) = \arctan nx$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛于 $\frac{\pi}{2}$. 事实上, 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 取 $n_0 = N + 1$, $x_0 = 1/n_0$, 则 $n_0 > N$, $x_0 \in (0, +\infty)$, 但 $\left| f_{n_0}(x_0) - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \arctan 1 - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4} > \epsilon_0$.

(2) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} x$ ($0 < x < +\infty$). 下面证明 $f_n(x) = x \arctan nx$ 在 $(0, +\infty)$ 一致收敛于 $\frac{\pi}{2} x$. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 由 $\varphi_n(x) = \left| f_n(x) - \frac{\pi}{2} x \right| = \frac{\pi x}{2} - x \arctan nx$, $\varphi'_n(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan nx - \frac{nx}{1 + (nx)^2}$, $\varphi''_n(x) = -\frac{2n}{(1 + n^2 x^2)^2} < 0$, 从而 $\varphi'_n(x)$ 单调下降, 又由 $\varphi'_n(0) = \frac{\pi}{2} > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi'_n(x) = 0$ 可得 $\varphi'_n(x) > 0$, 因此 $\varphi_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调上升, 而 $\varphi_n(0) = 0$.

$$= 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right) - \arctan nx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-n}{1+n^2x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{1}{n}. \text{ 故 } 0 <$$

$\varphi_n(x) < \frac{1}{n} (0 < x < +\infty)$. 即 $\left| f_n(x) - \frac{\pi}{2}x \right| < \frac{1}{n} (0 < x < +\infty) (n = 1, 2, \dots)$. 因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall x \in (0, +\infty)$, 有 $\left| f_n(x) - \frac{\pi}{2}x \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

【例 7-25】 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 有连续的导函数 $f'(x)$, 且 $f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$, 证明 $f_n(x)$ 在 (a, b) 内闭一致收敛于 $f'(x)$.

【证明】 任取 $[c, d] \subset (a, b)$. 取 $\delta_0 > 0$ 充分小, 使 $[c - \delta_0, d + \delta_0] \subset (a, b)$. 由一致连续性定理(康托定理)知 $f'(x)$ 在 $[c - \delta_0, d + \delta_0]$ 一致连续, 从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [c - \delta_0, d + \delta_0]$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$. 取 $N \in \mathbb{N}^+$, 使当 $n > N$ 时, $\frac{1}{n} < \min\{\delta, \delta_0\}$. 从而 $\forall x \in [c, d]$, 有 $x + \frac{1}{n} \in [c - \delta_0, d + \delta_0]$. 对 $f(x)$ 在区间 $\left[x, x + \frac{1}{n}\right]$ 应用拉格朗日中值定理得, $\exists \theta \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right]$, 使得 $f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = f'(\theta) \cdot \frac{1}{n}$. 于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall x \in [c, d]$, 有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f'(x)| &= \left| n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] - f'(x) \right| \\ &= |f'(\theta) - f'(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $f_n(x)$ 在 $[c, d]$ 一致收敛, 即 $f_n(x)$ 在 (a, b) 内闭一致收敛于 $f'(x)$.

【例 7-26】 讨论下列级数的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right), x \in [-\delta, \delta] (\delta > 0);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{x+n}} (0 < x < \infty);$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}, x \in [0, +\infty).$$

【解】 (1) 因在 $[-\delta, \delta]$ 上, $\left|1 - \cos \frac{x}{n}\right| = \left|2\sin^2 \frac{x}{2n}\right| < 2\left(\frac{x}{2n}\right)^2 \leq \frac{\delta^2}{2n^2}$ (当 n 充分大时), 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由 M -判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$ 在

$[-\delta, \delta]$ 一致收敛.

(2) 设 $a_n(x) = \sin x \sin nx$, $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+n}}$ ($n = 1, 2, \dots$), 由

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \text{ 可知, } \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx = 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x,$$

$\frac{n}{2}x$, 因此, $\left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| \leq 2, \forall x \in (0, +\infty), b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+n}}$ 对每个固定的 $x \in (0, +\infty)$ 关于 n 是单调的, 且在 $(0, +\infty)$ 一致收敛于 0, 由狄利克雷判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{x+n}}$ 在 $(0, +\infty)$ 一致收敛.

(3) 方法一 令 $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$, 则 $u_n(x) \geq 0, u'_n(x) = xe^{-nx}(2-nx)$, 由 $u'_n(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{n}$. 又当 $0 < x < \frac{2}{n}$ 时, $u'_n(x) > 0$, 当 $x > \frac{2}{n}$ 时, $u'_n(x) < 0$, 于是 $u_n(x)$ 在 $x = \frac{2}{n}$ 处取得最大值. 所以 $|u_n(x)| = u_n(x) \leq u_n\left(\frac{2}{n}\right) = 4e^{-2} \cdot \frac{1}{n^2}, \forall x \in [0, +\infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} 4e^{-2} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数在 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

方法二 由几何级数的求和公式知, 当 $x > 0$ 时, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx} = \frac{x^2}{1-e^{-x}}, s(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^+, f_n(x) = s(x) - s_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. 故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 的一致收敛性等价于函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 0. 下面证函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致收敛于 0. 当 $x > 0$ 时,

$f(x) = s(x) = \frac{x^2}{1-e^{-x}}, f(0) = 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-e^{-x}} = 0$, 故 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in (0, \delta)$ 时, 有 $\frac{x^2}{1-e^{-x}} < \epsilon$. 于是, $\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall x \in (0, \delta)$, 有 $\frac{x^2}{1-e^{-x}} e^{-nx} < \frac{x^2}{1-e^{-x}} < \epsilon$. 从而 $\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall x \in [0, \delta), |f_n(x)| < \epsilon$. 而

当 $\delta \leq x < +\infty$ 时, 由 $x < e^x$ 知, $\frac{x^2}{1-e^{-x}} e^{-nx} < \frac{e^{-(n-2)x}}{1-e^{-x}} < \frac{e^{-(n-2)\delta}}{1-e^{-\delta}} \rightarrow 0 (n$

$\rightarrow \infty$) ($n > 2$). 于是 $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $\forall x \in [\delta, +\infty)$, $|f_n(x)| < \epsilon$. 这样, $\forall n > N$, $\forall x \in [0, +\infty)$, $|f_n(x)| < \epsilon$. 因此, $\sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

【例 7-27】 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 的收敛性、绝对收敛性及一致收敛性.

【解】 当 $x = \pi$ 时, 级数每一项均为 0, 级数当然收敛. 设 $x \in (0, 2\pi)$, $x \neq \pi$, 这时 $\sin x \neq 0$. 用三角函数积化和差公式得, $2\sin \frac{x}{2} \sin x = \cos \frac{1}{2}x - \cos \frac{3}{2}x$, $2\sin \frac{x}{2} \sin 2x = \cos \frac{3}{2}x - \cos \frac{5}{2}x$, $2\sin \frac{x}{2} \sin 3x = \cos \frac{5}{2}x - \cos \frac{7}{2}x$, $\dots, 2\sin \frac{x}{2} \sin nx = \cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x$.

相加便得 $2\sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \sin kx = \cos \frac{1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x$, 因此, $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{\left| \cos \frac{1}{2}x \right| + \left| \cos \frac{2n+1}{2}x \right|}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

注意到 $\frac{1}{n}$ 单调下降趋于 0, 由狄利克雷判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 收敛. 从而

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 收敛.

易知 $\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}$, 同样应用狄利克雷判别法得, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n}$ 发散. 由比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n} \right|$ 发散. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 非绝对收敛.

取 $\epsilon_0 = \frac{1}{4}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 取 $n = N+1$, $p = n$, $x_0 = \frac{\pi}{4n}$, 则 $n > N$, $x_0 \in (0, 2\pi)$, $|S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)| = |S_{2n}(x_0) - S_n(x_0)| = \left| \frac{\sin(n+1)x_0}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x_0}{n+2} + \dots + \frac{\sin 2nx_0}{2n} \right| \geq \frac{n \sin nx_0}{2n} = \frac{\sqrt{2}}{4} > \epsilon_0$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 非一致收敛.

注 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 一致收敛, 其中 $0 < \delta < \pi$. 事实上, 取

$a_n(x) = \frac{1}{n}$, 它显然单调下降趋于 0, 从而在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 一致收敛于 0. 取

$b_n(x) = \sin nx$, 则当 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ 时, 由上面推导知, $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{\left| \cos \frac{1}{2}x \right| + \left| \cos \frac{2n+1}{2}x \right|}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\delta}{2} \right|},$$

即序列 $\left\{ \sum_{k=1}^n \sin kx \right\}$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 一致有界. 根据狄利克雷判别法, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 一致收敛. 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 内闭一致收敛.

【例 7.28】 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 绝对并一致收敛, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在 $[a, b]$ 是否一致收敛?

【解】 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$, $0 \leq x \leq 1$, 易知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$

$= \frac{x(x-1)}{x+1}$, $0 \leq x \leq 1$. 而 $\left| \sum_{i=1}^n (-1)^i (1-x)x^i - \frac{x(x-1)}{x+1} \right| = \frac{x^{n+1}(1-x)}{1+x}$ 在 $[0, 1]$ 一致收敛于 0, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 一致收

敛. 又由 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 绝对收敛,

但 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ 的和函数不连续, 由一致收敛的性质知,

$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 不一致收敛.

【例 7.29】 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收

敛, 但对任何 x 并非绝对收敛; 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 虽在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 绝对收敛, 但并不一致收敛.

【证明】 由于 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}$, 因此 $\frac{1}{n+x^2}$ 对每个固

定的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 关于 n 是单调的, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛于 0. 而 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 由狄利克雷判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

下面讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 它为正项几何级数, 公比 $r = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 绝对收敛. 易知和函数 $S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$, 于是

$$|S_n(x) - S(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{(1+x^2)^n}, & x \neq 0 \end{cases}$$

由于 $\sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = 1$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不一致收敛.

注 (1) 类似可证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛. 事实上, 由于 $\frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\dots+(x^2)^n} \leq \frac{x^2}{nx^2} = \frac{1}{n}$, 从而 $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛于 0. 而 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 由狄利克雷判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(2) 上面几个例子说明了函数项级数的处处收敛性、绝对收敛性与一致收敛性的蕴含关系.

§ 3 幂级数

一、基本要求

1. 掌握幂级数收敛半径及收敛域的求法.
2. 掌握幂级数的和函数的性质, 会求一些幂级数的和函数, 并会由此求出某些数项级数的和.

3. 理解函数可展开为泰勒级数的充分必要条件.

4. 掌握一些常用函数的麦克劳林展开式, 会用它们将一些函数间接展开成幂级数.

二、主要概念和结论

1. 阿贝尔定理 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_1 \neq 0$ 处收敛, 则对满足不等式 $|x| < |x_1|$ 的一切点 x , 幂级数都收敛且绝对收敛; 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_2 \neq 0$ 处发散, 则对满足不等式 $|x| > |x_2|$ 的一切点 x , 幂级数都发散.

由此定理可知, 存在 $0 < r < +\infty$, 使得幂级数在 $|x| < r$ 绝对收敛, 在 $|x| > r$ 发散. 这时称 r 为幂级数的收敛半径.

当幂级数只在 $x = 0$ 收敛时, 自然理解为收敛半径为 0; 当幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 每点都收敛时, 收敛半径为 $+\infty$.

2. 收敛半径公式 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ (或 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$), 则 (I) 当 $0 < \rho < +\infty$ 时, 收敛半径 $r = \frac{1}{\rho}$; (II) 当 $\rho = 0$ 时, 收敛半径 $r = +\infty$; (III) 当 $\rho = +\infty$ 时, 收敛半径 $r = 0$.

3. 幂级数的内闭一致收敛性 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r , 则级数在收敛区间 $(-r, r)$ 内任一闭区间 $[a, b]$ 一致收敛.

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间内可以逐项求导与逐项积分, 且收敛半径不变, 即

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1},$$

$x \in (-r, r).$

5. 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有各阶导数, 这时称形式为

$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$
的级数为函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的泰勒级数. 当 $x_0 = 0$ 时的泰勒级数称为麦克

劳林级数.

6. 几个常用的麦克劳林级数:

$$(1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(2) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(3) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(4) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1);$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

三、常用解题方法与典型例题

【例 7.30】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} x^n$ 的收敛域.

【解】 $r = \frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}} = \frac{1}{3}$, 当 $x = \frac{1}{3}$ 时, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 发散; 当 $x = -\frac{1}{3}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(1 + \left[\frac{2}{3}\right]^n\right)}{n}$ 收敛. 从而收敛域为 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

【例 7.31】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} x^{n+1}$ 的收敛半径与收敛域.

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(n+2)}{n+2}}{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1$, 故收敛半径为 1; 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 发散. 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 收敛. 故收敛域为 $[-1, 1)$.

【例 7.32】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 的收敛半径与收敛域.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{3^n + (-2)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot (-2)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} = 3.
 \end{aligned}$$

故收敛半径为 $\frac{1}{3}$.

当 $x+1 = \frac{1}{3}$, 即 $x = -\frac{2}{3}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 故此时级数发散.

当 $x+1 = -\frac{1}{3}$ 即 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + (-2)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 均收敛. 于是此时原级数收敛. 故收敛域为 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

【例 7.33】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和函数 $S(x)$.

【解】 $r = \frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$. 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, $\forall x \in (-1, 1)$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = 1$. 定义当 $x=0$ 时, $\frac{S(x)}{x} = 1$. $\forall x \in (-1, 1)$, 从 0 到 x 逐项积分, 有 $\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x(1 + 2x + 3x^2 + \cdots)$, 从而 $\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt = -\frac{x}{(1-x)^2}$. 对上式两端求导, 得 $\frac{S(x)}{x} = \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$, 于是, $S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, $I = (-1, 1)$.

【例 7.34】 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域 I .

【解】 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} y^n$, $r_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} y^n$ 的收敛域为 $[-1, 1]$, 令 $y = \frac{1-x}{1+x}$, 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$ 的收敛域 $I = [0, \infty)$.

【例 7-35】 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数.

【解】 $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, 则当 $|x| < 1$ 时, 有

$$(xf(x))' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right)' = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

积分一次得 $(xf(x))' = -\ln(1-x)$, 再积分得 $xf(x) = -\int_0^x \ln(1-t) dt = (1-x)\ln(1-x) + x$, 因此当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$. 又当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 收敛, 于是有 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$, $x \in [-1, 1)$, $f(1) = 1$.

【例 7-36】 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n$ ($a > 0, b > 0$) 的收敛域 I .

【解】 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} = \max\{a, b\}$, $r = \frac{1}{\rho}$, 收敛区间为 $(-r, r)$. 若 $a \geq b$, 当 $x = -r = -\frac{1}{a}$ 时, 则相应的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} \right)^n \right]$, 这是一个条件收敛与绝对收敛级数的和, 因此条件收敛; 当 $x = r$ 时, 则相应的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} \right)^n \right]$ 发散, 故 $I = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right)$. 若 $a < b$, 当 $x = -r = -\frac{1}{b}$ 时, 则相应的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n \right]$, 这是两个绝对收敛级数的和, 因此绝对收敛.

当 $x = r$ 时, 则相应的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n \right]$ 收敛, 故 $I = \left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b} \right]$.

【例 7.37】 求 $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 的麦克劳林级数.

【解】
$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= 1 - \frac{3}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} x^{2n}, |x| < 1. \end{aligned}$$

【例 7.38】 求函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 的麦克劳林级数.

【解】 因 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots, |x| < 1$,
故 $\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 - \frac{1}{2}(-2x) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(-2x)^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}(-2x)^3 + \cdots$
$$= 1 + x + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots, |x| < \frac{1}{2},$$

从而 $\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x + x^2 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^4 + \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}, |x| < \frac{1}{2}.$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 交错项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ 收敛
(数列 $\left\{ \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \right\}$ 单调下降且趋于 0), 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \text{ 发散. 事实上, } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{2n+1}{2n+2},$$

$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$, 由拉阿比判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$

$\frac{1}{2^{n+1}}$ 发散. 所以, 该展开式的收敛域为 $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

【例 7.39】 求 $J = \frac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \cdots}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \cdots}$.

【解】 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$, 因 $\frac{J}{\pi^2} = \frac{\pi + \frac{\pi^5}{5!} + \frac{\pi^9}{9!} + \cdots}{\frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^7}{7!} + \frac{\pi^{11}}{11!} + \cdots}$, 故

$$\frac{J - \pi^2}{\pi^2} = \frac{\sin \pi}{\frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^7}{7!} + \frac{\pi^{11}}{11!} + \cdots} = 0, \text{ 所以 } J = \pi^2.$$

§ 4 傅里叶级数

一、基本要求

1. 理解三角函数系及其正交性的概念, 理解函数的傅里叶系数与傅里叶级数的概念.
2. 掌握函数可展开成傅里叶级数的充分条件.
3. 会将定义在 $[-\pi, \pi]$ 或 $[-l, l]$ 上的函数展开成傅里叶级数, 会将定义在 $[0, l]$ 上的函数展开成正弦级数和余弦级数.

二、主要概念和结论

1. 傅里叶级数的定义 (1) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积函数, 令

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

称 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数. 称级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 为 $f(x)$

的傅里叶级数. 记为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的可积函数, 则有下列展开式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(3) 若 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的可积偶函数, 则 $f(x)$ 可展成余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

若 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的可积奇函数, 则 $f(x)$ 可展成正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

2. 收敛性定理 若函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 且在 $[-\pi, \pi]$ 逐段光滑, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $f(x)$ 的连续点收敛到 $f(x)$, 在 $f(x)$ 的不连续点(第一类间断或可去间断)收敛到 $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

3. 逐项积分定理 若 $f(x)$ 为在 $[-\pi, \pi]$ 上逐段连续的以 2π 为周期的函数, 傅里叶级数展开式为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则对 $\forall x_0, x$, 有

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt.$$

三、常用解题方法与典型例题

【例 7-40】 将周期为 2π 的函数 $f(x) = \pi^2 - x^2 (-\pi < x < \pi)$ 展成傅里叶级数.

【解】 由 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中为偶函数, 故将 $f(x)$ 作以 2π 为周期的周期延拓, 则其傅里叶系数有: $b_n = 0, k = 1, 2, \dots; a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi^2,$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(\pi^2 - x^2) \sin nx}{n} - \frac{2x \cos nx}{n^2} + \frac{2 \sin nx}{n^3} \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

故 $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$, $x \in (-\pi, \pi)$.

【例 7-41】 展开函数 $f(x) = |x|$, $(-\pi < x < \pi)$ 为傅里叶级数, 并求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

【解】 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $b_n = 0$, $k = 1, 2, \dots$; $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$, 于是

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x + \dots \right].$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中连续、逐段光滑, 因此

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x + \dots \right],$$

$x \in (-\pi, \pi)$.

$$\text{令 } x = 0, \text{ 即有 } 1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\text{设 } S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots, \quad S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots,$$

$$S_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} + \dots,$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \dots,$$

因为 $S_2 + S_3 = S_1 = \frac{\pi^2}{8}$, $S_2 = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} (S_1 + S_2)$, 所以

$$\begin{cases} S_2 + S_3 = \frac{\pi^2}{8} \\ 3S_2 - S_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{S_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}, \quad S_3 = \frac{\pi^2}{12}.$$

【例 7-42】 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 可积和绝对可积, 证明:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 满足 $f(x+\pi) = f(x)$, 则 $a_{2m-1} = b_{2m-1} = 0$, $m = 1, 2, \dots$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 满足 $f(x+\pi) = -f(x)$, 则 $a_{2m} = b_{2m} = 0$, $m = 1, 2, \dots$.

【证明】 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$
对第二个积分作变量替换 $x = \pi + t$, 则

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(\pi+t) \cos n(\pi+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x) + (-1)^n f(\pi+x)] \cos nx dx. \end{aligned}$$

当 $f(\pi+x) = f(x)$ 时, $a_{2m-1} = 0$; 当 $f(\pi+x) = -f(x)$ 时, $a_{2m} = 0$.

同理 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x) + (-1)^n f(\pi+x)] \sin nx dx$.

当 $f(\pi+x) = f(x)$ 时, $b_{2m-1} = 0$; 当 $f(\pi+x) = -f(x)$ 时, $b_{2m} = 0$.

【例 7.43】 求 $f(x) = \cos ax$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数 ($a \in \mathbb{N}$), 并证明

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad x \neq m\pi, \quad m \in \mathbb{N}.$$

【解】 由于 $f(x) = \cos ax$ 是偶函数, 故 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax dx = \frac{2 \sin a\pi}{a\pi};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-a)x}{n-a} + \frac{\sin(n+a)x}{n+a} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 2a \sin \pi a}{(n^2 - a^2)\pi}. \end{aligned}$$

于是由 $f(x) = \cos ax$ 的光滑性得,

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2} \cos nx \right].$$

§ 5 综合例题

【例 7.44】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$ 的收敛性.

【解】 由不等式 $\ln(x+1) < x$ ($-1 < x < +\infty, x \neq 0$), 可得 $\ln \frac{n+1}{n}$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 故原级数为正项级数. 由于 $\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}$, 因此 $0 < \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. 由比较判别法, 故原级数收敛.

注 设此级数的和为 γ , $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, 于是有

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) = H_n - \ln(n+1) \rightarrow \gamma,$$

上式可写成 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + \gamma + \gamma_n$, 其中 γ_n 为无穷小量, $\gamma = 0.5772156649\cdots$ 为欧拉常数, 此式刻画了 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散的级别.

【例 7-45】 设 $a_n \geq 0$, 且单调下降, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 同时收敛或同时发散.

分析 类似于数列的结论: 设数列 $\{a_n\}$ 单调, 则 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当它的一子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛.

【证明】 一方面, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\exists k \in \mathbb{N}^+$, 使得 $2^k \leq n < 2^{k+1}$, 由 $\{a_n\}$ 的单调性, 有

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &\leq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots + a_{2^{k+1}-1} \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{另一方面, } \forall k \in \mathbb{N}^+, a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &\leq 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + 2(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + \\ &\quad 2(a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}), \end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 同时收敛或同时发散.

【例 7-46】 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ 的收敛性.

【解】 令 $a_n = \frac{1}{(\ln n)^p}$. 当 $p \leq 0$ 时, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ 发散. 设 $p > 0$, 则 $a_n \geq 0$, 且单调下降. 因为 $2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{n^p (\ln 2)^p} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 由例 7-45 知,

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ 发散.

【例 7-47】 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ 的收敛性.

【解】 方法一 当 $a > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ 发散. 设 $0 < a < 1$, 令 $a_n = a^{\ln n}$, 则 $a_n \geq 0$, 且单调下降. 因为 $2^n a_{2^n} = 2^n a^{n \ln 2} = (2a^{\ln 2})^n$. 而当 $2a^{\ln 2} < 1$, 即 $a < \frac{1}{e}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a^{\ln 2})^n$ 收敛, 当 $2a^{\ln 2} \geq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a^{\ln 2})^n$ 发散. 由例 7-45 知, $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ 当 $a < \frac{1}{e}$ 时收敛, 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时发散.

方法二 令 $a_n = a^{\ln n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{a^{\ln n}}{a^{\ln(n+1)}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n [e^{-\ln a \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})} - 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} n [e^{-\ln a \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})} - 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln a) \cdot n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \frac{1}{a}$, 由拉阿比判别法, 当 $\ln \frac{1}{a} > 1$, 即 $a < \frac{1}{e}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ 收敛; 当 $\ln \frac{1}{a} < 1$, 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ 发散. 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 级数为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 所以发散.

方法三 当 $a > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ 发散. 设 $0 < a < 1$, 取 $f(x) = a^{\ln x}$, 它在 $[1, +\infty)$ 非负, 连续, 单调下降. $f(n) = a^{\ln n}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x a^{\ln t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x a^{\ln t} dt = \begin{cases} -(\ln a e)^{-1}, & a < \frac{1}{e} \\ \infty, & a \geq \frac{1}{e} \end{cases}$$

由积分判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$ 当 $a < \frac{1}{e}$ 时收敛, 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时发散.

注 分别取 $a = \frac{1}{2} > \frac{1}{e}$ 及 $a = \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$, 则得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ 收敛.

【例 7-48】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. 求证 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 并

$$\text{且 } \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

【证明】 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 由柯西收敛原理知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > m > N_1$, 有

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 对上述 $\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_2$, 有 $|na_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > m > N$, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m+1}^n k(a_k - a_{k+1}) \right| &= |(m+1)(a_{m+1} - a_{m+2}) + (m+2)(a_{m+2} - a_{m+3}) + \cdots \\ &\quad + n(a_n - a_{n+1})| \\ &= |(m+1)a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n - na_{n+1} - a_{n+1} + a_{n+1}| \\ &\leq |a_{m+2} + \cdots + a_n + a_{n+1}| + |(m+1)a_{m+1}| + |(n+1)a_{n+1}| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 的前 n 项部分和为

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1}, \end{aligned}$$

记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 可设 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_{n+1} = S. \text{ 即 } \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

【例 7-49】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ ($x \geq 0$) 的收敛性.

分析 根据一般项的表达形式, 先求积化简, 然后灵活运用比较判别法.

【解】 当 $x = 1$ 时, $\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} = \frac{1}{2^n}$, 原级数收敛.

当 $x \neq 1$ 时, $u_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} = \frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}.$

(i) 当 $x > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}} \bigg/ \frac{1}{x^n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}(1-x)}{1-x^{2n}} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-1}{1-\frac{1}{x^{2n}}} = x-1 > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ 收敛, 由比较判别法知, 原级数收敛.

(II) 当 $x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}} / x^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x}{1-x^{2n}} = 1-x > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 收敛, 由比较判别法知, 原级数收敛.

总之, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ ($x \geq 0$) 收敛.

【例 7.50】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n}{4}\pi}{n^p + \sin \frac{n}{4}\pi}$ 的收敛性.

【解】 由于 $\frac{\sin \frac{n}{4}\pi}{n^p + \sin \frac{n}{4}\pi} = \frac{\sin \frac{n}{4}\pi}{n^p} \left(1 + \frac{\sin \frac{n}{4}\pi}{n^p} \right)^{-1}$
 $= \frac{\sin \frac{n}{4}\pi}{n^p} \left[1 - \frac{\sin \frac{n}{4}\pi}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right) \right] = \frac{\sin \frac{n}{4}\pi}{n^p} - \frac{\sin^2 \frac{n}{4}\pi}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$. 当 $2p$
 > 1 , 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 由第二项及第三项所组成的级数均收敛, 而对于级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n}{4}\pi}{n^p}$, 由于 $|n^{-p}|$ 单调下降趋于 0, 且 $\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| =$
 $\left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{4}}{2\sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}$, $n = 1, 2, \dots$, 由狄利克雷判别法知,

它是收敛的. 从而原级数当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛. 又因 $\frac{\left| \sin \frac{n}{4}\pi \right|}{n^p} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p} = \frac{1}{2n^p}$
 $-\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^p}$, 且当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛, 故当

$\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \sin \frac{n}{4}\pi \right|}{n^p}$ 发散, 从而此时原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\left| \frac{\sin \frac{n}{4}\pi}{n^p + \sin \frac{n}{4}\pi} \right| \leq \frac{1}{n^p - 1}$, 而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p - 1}$ 收敛, 故原级数

绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于 $\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{2n} \geq 0$, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ 发散, 从而原级数发散.

【例 7.51】 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} \frac{1}{n^\beta}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) 的收敛性.

【解】 $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta \frac{1+n}{\alpha+n}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta \frac{1+n}{\alpha+n} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+x)^{\beta+1}}{1+\alpha x} - 1}{x} = \beta + 1 - \alpha$. 故 (i) 当 $\beta + 1 - \alpha > 1$ 时, 即 $\beta > \alpha$ 时, 由拉阿比判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^\beta}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) 收敛. (ii) 当 $\beta + 1 - \alpha < 1$, 即 $\beta < \alpha$ 时, 原级数发散. (iii) 当 $\beta = \alpha$ 时 原级数发散.

【例 7.52】 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$ 的收敛性, 其中 $p, q > 0$.

【解】 易知函数 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q}$ 当 x 充分大时非负, 连续, 单调下降. 若 $p = 1$, 则

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^q} = \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(\ln \ln x)^{q-1}} \Big|_3^{+\infty}, & q \neq 1 \\ \ln \ln \ln x \Big|_3^{+\infty}, & q = 1 \end{cases}$$

当 $q > 1$ 时收敛, 当 $q \leq 1$ 时发散; 故由柯西积分判别法知, 原级数当 $p = 1, q > 1$ 时收敛; $p = 1, q \leq 1$ 时发散. 若 $p \neq 1$, 作代换 $\ln x = t$, 有

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$$

当 $p > 1$ 时, 取 $\eta > 0$, 使 $p - \eta > 1$. 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-\eta} \cdot \frac{1}{t^p (\ln t)^q} =$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = 0$, 故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 收敛, 从而原级数收敛; 当 $p < 1$ 时, 取

$\tau > 0$, 使 $p + \tau < 1$. 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p+\tau} \cdot \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\tau}{(\ln t)^q} = +\infty$, 故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 发散, 从而原级数发散.

综上所述, 可知原级数当 $p = 1, q > 1$ 或 $p > 1, q$ 为任意数时收敛.

【例 7-53】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ ($0 < x < \pi$) 的收敛性(绝对收敛或条件收敛).

【解】 当 $p > 1$ 时, 由于 $\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \leq \left| \frac{1}{n^p} \right|$ ($0 < x < \pi$), 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 由 M -判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ 绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于 $\left\{ \frac{1}{n^p} \right\}$ 单调下降趋于 0, 且部分和 $\sum_{n=1}^n \cos nx$ 有界 ($0 < x < \pi$), 由狄利克雷判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ 收敛. 注意到 $\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \geq \left| \frac{\cos^2 nx}{n^p} \right| = \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散. 同样应用狄利克雷判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 收敛, 由比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos nx|}{n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, 由级数收敛的必要条件知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ 发散. 总之, $\forall x \in (0, \pi)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时绝对收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

【例 7-54】 讨论函数序列 $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ 在所示区域的一致收敛性:

(i) $x \in [0, b], b < 1$; (ii) $x \in [0, 1]$; (iii) $x \in [a, +\infty), a > 1$.

【解】 (i) 当 $0 < b < 1$ 时, $\forall x \in [0, b]$, 有 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln b} \right] + 1$, 则 $\forall n > N, \forall x \in [0, b]$, 有 $|f_n(x) - 0| = \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n < b^n < \varepsilon$. 因此 $f_n(x)$ 在 $[0, b] (b < 1)$ 一致收敛.

$$(II) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases} \quad \text{取 } \varepsilon_0 = \frac{1}{4}, \forall N \in \mathbb{N}^+,$$

取 $n_0 = N + 1$, $x_0 = 2^{-\frac{1}{n_0}}$, 则 $n_0 > N$, $x_0 \in [0, 1]$, $|f_{n_0}(x_0) - 0| = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$, 所以 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 不一致收敛.

(III) 当 $x \in [a, +\infty)$, $a > 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} / \ln a \right] + 1$, 则 $\forall n > N$, $\forall x \in [a, +\infty)$, 有 $|f_n(x) - 1| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \frac{1}{1+x^n} < \left(\frac{1}{x} \right)^n < \left(\frac{1}{a} \right)^n < \varepsilon$. 所以 $f_n(x)$ 在 $[a, +\infty)$ ($a > 1$) 一致收敛.

【例 7-55】 设 $f_1(x)$ 在 $[a, b]$ 黎曼可积, 定义函数序列 $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求证 $|f_n(x)|$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 0.

【证明】 因为 $f_1(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 故 $f_1(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使得 $|f_1(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. 于是, $\forall x \in [a, b]$,

$$|f_2(x)| \leq M(x-a) \leq M(b-a);$$

$$|f_3(x)| \leq M \int_a^x (x-a) dx = \frac{M}{2!} (x-a)^2 \leq \frac{M}{2!} (b-a)^2, \dots,$$

$$|f_{n+1}(x)| \leq \frac{M}{n!} (x-a)^n \leq \frac{M}{n!} (b-a)^n, \dots,$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n!} (b-a)^n$ 收敛, 因此 $|f_n(x)|$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 0.

注 这种迭代法估值在常微分方程解的讨论中经常用到.

【例 7-56】 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, 求证:

(1) $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 连续; (2) $f(x)$ 在 $x > 0$ 时无穷次可微.

【证明】 (1) 由于 $\left| \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \right| \leq \frac{1}{1+n^2}$, $\forall x \in [0, +\infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ 收敛, 根据 M -判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致收敛. 又每个 $u_n(x) =$

$\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 故 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 连续.

(2) $\forall x_0 > 0$, 在 $\left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right)$ 上, $u'_n(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$, $\forall n$, $u'_n(x)$ 在 $\left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right)$ 连续. 由于 $|u'_n(x)| = \left| \frac{-n}{(1+n^2)e^{nx}} \right| \leq \frac{n}{(1+n^2)e^{\frac{nx_0}{2}}}$, $\frac{x_0}{2} \leq x < \infty$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)e^{\frac{nx_0}{2}}}$ 收敛, 由 M -判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $\left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right)$ 一致收敛, 于是 $f(x)$ 在 $\left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right)$ 可导, 且 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$, $\frac{x_0}{2} \leq x < \infty$. 特别地, 上式在 $x_0 > \frac{x_0}{2}$ 成立: $f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx_0}}{1+n^2}$. 由 $x_0 > 0$ 的任意性, 就证明了 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$, $0 < x < \infty$. 同理可证 $f(x)$ 任意次可导, 即证明了 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时无穷次可微.

【例 7-57】 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x| < r$ 时收敛, 那么当 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛时, 有 $\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$.

【证明】 由幂级数逐项积分定理, 当 $|x| < r$ 时, $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 收敛, 由阿贝尔第二定理, 在上式中令 $x \rightarrow r-0$, 得 $\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$.

【例 7-58】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^n x \right]^n$ 的收敛半径与收敛区域.

【解】 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e$, 知其收敛半径为 $\frac{1}{e}$.
当 $|x| = \frac{1}{e}$ 时, 考虑 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2 \ln(1+\frac{1}{n})}}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1+\frac{1}{n}) - n}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$. 于是当 $|x| = \frac{1}{e}$ 时, 原级数发散, 从而收敛域为 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

【例 7.59】 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!2^n} x^n$ 的和函数.

【解】 由于 $e^{\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

又 $e^{\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

$e^{\frac{x}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$, 两边同乘以 $\frac{x}{2}$ 得: $\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}$

$\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$, 两边对 x 求导得:

$\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4} e^{\frac{x}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \frac{x^{n-1}}{2^n}$, 两边同乘以 x 得: $\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$+ \frac{x^2}{4} e^{\frac{x}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n! 2^n} x^n$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n! 2^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n! 2^n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! 2^n} = \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} +$

$\frac{x^2}{4} e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} - 1 = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

【例 7.60】 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n+1}$ 的和函数.

【解】 由于 $\frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4} - 1, |x| < 1$. 两边积分, 得

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{4n} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - x, |x| < 1.$$

当 $x \neq 0$ 时, 两边同时除以 x^2 得: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n+1} = \frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{x}, 0 < |x| < 1$.

当 $x = 0$ 时, 原级数为 0.

$$\text{所以 } s(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{x}, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

【例 7.61】 利用级数计算积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$.

【解】 把被积函数展为幂级数 $\frac{\ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, 该级数在 $[0, 1)$ 是内闭一致收敛的, 当 $0 < t < 1$ 时, 有 $\int_0^t \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$, 两端令 $t \rightarrow 1-0$, 得 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$.

【例 7.62】 证明: (1) $\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} = x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

分析 巧妙运用泰勒展开式并借助广义积分来证明级数问题.

【证明】 (1) $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}, \forall x \in [0, 1]$. 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, $x = \arcsin \sin x = \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}$.

$$(2) \left| \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} \right| = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}.$$

由拉阿比判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$ 收敛. 根据 M-判别法,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 一致收敛. 对 $\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} = x$ 逐项积分得,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx,$$

从而可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

【例 7.63】 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, a_n, b_n 为其傅里叶系数, 求卷积函数 $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$ 的傅里叶级数, 并且利用所得的结

果推出李雅普诺夫等式.

【解】 设 $f(x)$ 的傅里叶展开式为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,
将此级数乘 $f(x+t)$ 并逐项积分得:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} f(x+t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) f(x+t) dt \\ &= \frac{a_0}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nt dt + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin nt dt \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + b_n (b_n \cos nx - a_n \sin nx)] \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos nx. \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时, $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ (李雅普诺夫等式).

第八章 广义积分与含参变量积分

§1 广义积分

一、基本要求

1. 理解无穷限广义积分、瑕积分的概念, 熟悉广义积分与无穷级数之间的共同点与差异.

2. 掌握无穷限广义积分、瑕积分的柯西收敛原理, 掌握无穷限广义积分、瑕积分的收敛性判别法.

二、主要概念和结论

1. 无穷限广义积分 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有定义, 并且在任意有限区间 $[a, A]$ 上可积, 若极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ 存在, 则称此极限值为 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分, 记为 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$, 并称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是收敛的. 若极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ 不存在, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是发散的. 和无穷级数相仿, 称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛, 如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛. 类似地有结论, 绝对收敛的无穷限积分必收敛. 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散, 则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 条件收敛.

2. 柯西收敛原理 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > a$, 当 $x_1, x_2 > X$ 时, 有 $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \epsilon$.

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall X > a, \exists x_1, x_2 > X$, 使得

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

3. 无穷限广义积分收敛性判别法

(1) 比较判别法 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有定义, 在任何有限区间 $[a, A]$ 可积.

(i) 若存在数 B , 当 $x \geq B$ 时, $|f(x)| \leq \varphi(x)$, 而 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛. 若 $|f(x)| \geq \varphi(x) > 0$ ($x > B$), 而 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散.

(ii) 若 $\varphi(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)} = l$, 则

当 $0 \leq l < +\infty$ 时, 由 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 收敛可以推出 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛;

当 $0 < l \leq +\infty$ 时, 由 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 发散可以推出 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散.

特别地, 取 $\varphi(x) = \frac{C}{x^p}$ 作比较的标准时, 有非常实用的形式: 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p |f(x)| = l$, 则当 $p > 1$, $0 \leq l < +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛; 当 $p \leq 1$, $0 < l \leq +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散.

(2) 狄利克雷判别法 若 $\int_a^A f(x) dx$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使 $\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq M$, $\forall A > a$; $g(x)$ 单调且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x)$ 趋向于 0, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 收敛.

(3) 阿贝尔判别法 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 收敛.

4. 瑕积分 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 有定义, 在任意区间 $[a + \eta, b]$ 上可积, 在 $(a, a + \eta]$ 无界 (其中 $\eta > 0$). 若极限 $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$ 存在, 则称此极限值为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的瑕积分, 记为 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$, 并

称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 称 a 为瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的瑕点; 若极限 $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x)dx$ 不存在, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

5. 瑕积分的收敛性判别法

(1) 柯西收敛原理 设瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 只有惟一的瑕点 a , 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, 当 $0 < \eta', \eta'' < \eta$ 时, 有 $\left| \int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

(2) 比较判别法 设瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 只有惟一的瑕点 a .

(i) 若存在 $\delta > 0$, 当 $a < x < a + \delta$ 时, $|f(x)| \leq \varphi(x)$, 而 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛; 若当 $a < x < a + \delta$ 时, $|f(x)| \geq \varphi(x) > 0$, 而 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散.

(ii) 若 $\varphi(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)} = l$, 则

当 $0 \leq l < +\infty$ 时, 由 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx$ 收敛;

当 $0 < l \leq +\infty$ 时, 由 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx$ 发散.

(3) 狄利克雷判别法 设瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 只有惟一的瑕点 a , $\int_{a+\eta}^b f(x)dx$ 是 η 的有界函数, $g(x)$ 单调且当 $x \rightarrow a$ 时趋向于 0, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

(4) 阿贝尔判别法 设瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 只有惟一的瑕点 a , $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, $g(x)$ 单调有界, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

6. 常用的重要结论

(i) 无穷限积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ 当 $p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散 ($a > 0$).

(ii) 瑕积分 $\int_0^b \frac{1}{x^p}dx$ 当 $p < 1$ 收敛, $p \geq 1$ 发散.

三、常用解题方法与典型例题

【例 8-1】 求下列无穷积分的值:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)};$$

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+p)(x^2+q)} \quad (p, q > 0).$$

【解】 (1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$
 $= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_1^A = \frac{1}{2} \ln 2.$

(2) 设 $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0)$, 则

$$\begin{aligned} I &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{a} \int_0^A \sin bx de^{-ax} \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{a} \left(e^{-ax} \sin bx \Big|_0^A - b \int_0^A e^{-ax} \cos bx dx \right) \right] \\ &= -\frac{b}{a^2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos bx de^{-ax} \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{b}{a^2} \left(e^{-ax} \cos bx \Big|_0^A + b \int_0^A e^{-ax} \sin bx dx \right) \right] \\ &= \frac{b}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \\ &= \frac{b}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} I. \end{aligned}$$

故 $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$

(3) 若 $p = q$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+p)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sqrt{p} \tan t)}{(p \tan^2 t + p)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{p} \sec^2 t dt}{p^2 \sec^4 t} \\ &= \frac{\sqrt{p}}{p^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{p} \pi}{4 p^2}. \end{aligned}$$

若 $p \neq q$,

$$\text{原式} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{q-p} \left(\frac{1}{x^2+p} - \frac{1}{x^2+q} \right) dx$$

$$= \frac{1}{q-p} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \arctan \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan \frac{x}{\sqrt{q}} \right) \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2(q-p)} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{q}} \right).$$

【例 8.2】 讨论下列无穷积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|} dx$; (2) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{2} \right)^{-1} dx$.

【解】 (1) $\forall x \in [0, +\infty)$, $\frac{1}{1+x|\sin x|} > \frac{1}{1+x}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$ 发散, 由比较判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|} dx$ 发散.

(2) 当 $p \leq 1$ 时, $\frac{\ln x}{x^p} \geq \frac{1}{x}$ (x 充分大), 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$ 发散.

当 $p > 1$ 时, 设 $p = 1 + \sigma$ ($\sigma > 0$), x 充分大时, $\frac{\ln x}{x^{1+\sigma}} < \frac{1}{x^{1+\sigma/2}}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\sigma/2}} dx$ 收敛, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$ 收敛.

(3) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(1 + \cos^2 x) + \ln 2}{x^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的瑕点. 又当 x 充分大时, $\left| \frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{2} \right)^{-1} \right| \leq \frac{\sin^2 x}{2x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{2} \right)^{-1} dx$ 收敛.

【例 8.3】 讨论积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx$ 的收敛性.

【解】 方法一 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \arctan x}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}$, $p = 2 > 1$, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx$ 收敛.

方法二 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \arctan x}{1+x^3} / \frac{x}{1+x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. $\forall x \in [1, +\infty)$, $\frac{x \arctan x}{1+x^3} > 0$. 又 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$ 收敛, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx$ 收敛.

方法三 由于 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$ 收敛, $\arctan x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调有界, 由阿贝尔判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx$ 收敛.

【例 8.4】 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续, 并且积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 如果仅知道积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 以及 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $f(x) \geq 0$, 是否仍有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

【证明】 方法一 由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (不妨设 $\delta \leq \varepsilon$), $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 又因为 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 对上述 $\delta > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $x_1, x_2 > M$ 时, 有 $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \frac{\delta^2}{2}$. 于是对所有 $x > M$ 以及 $M < x_1 \leq x \leq x_2, x_2 - x_1 = \delta$, 有

$$\begin{aligned} \delta |f(x)| &\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - f(t)] dt \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - f(t)| dt + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \delta + \frac{\delta^2}{2}, \end{aligned}$$

所以当 $x > M$ 时, $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} \leq \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

方法二 反证法. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及数列 $\{x_n\}$ 使 $x_n \rightarrow +\infty$, $|f(x_n)| > \varepsilon_0 (n = 1, 2, \dots)$. 不妨设 $f(x_n) > \varepsilon_0 (n = 1, 2, \dots)$. 由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续, 对上述 $\varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_n| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, 从而 $f(x) > \frac{\varepsilon_0}{2}$. 由此 $\int_{x_n - \delta}^{x_n + \delta} f(x) dx > \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 2\delta = \varepsilon_0 \delta$ ($n = 1, 2, \dots$). 这与 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛矛盾. 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

如果仅有 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 以及 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $f(x) \geq 0$, 则不能推出

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \text{ 例如, 函数 } g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[n-1, n - \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) \\ n, & x \in \left[n - \frac{1}{n \cdot 2^n}, n \right) \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots$$

则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ 不存在, 且它在 $[0, +\infty)$ 上无界, 然而 $\int_0^{+\infty} g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n \cdot 2^n}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

现把 $g(x)$ 稍作修改, 使每一狭条长方形顶边的中点与底边的两端分别相连, 所得函数 $f(x)$ 即为非负连续函数, 且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{2}$ 仍然收敛, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0.$

注 这是广义积分与级数的区别之一, 即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛并不以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 作为其必要条件, 即使 $f(x)$ 非负连续也是如此. 那么, 在 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的基础上, 再添加怎样一些附加条件, 便能使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 呢? 本例中的“一致连续”, 后面例 8-41 中的“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在”以及例 8-42 中的“ $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛”都是一些合适的附加条件.

【例 8-5】 证明若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调下降, 且积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0.$

【证明】 不妨设 $a > 0, f(x) \geq 0.$ 由 $f(x)$ 的单调性知, $\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt \geq \frac{x}{2} f(x), \forall x \in [a, +\infty).$ 因此由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的柯西原理知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0.$

注 同理可进一步证明一般情形以及关于瑕积分的情形:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调下降, $a > 0$, 且积分 $\int_a^{+\infty} x^b f(x)dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{b+1} f(x) = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调下降, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, 且 $\int_0^1 x^b f(x)dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{b+1} f(x) = 0.$

【例 8-6】 讨论下列积分的收敛性, 若收敛求其值:

(1) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx;$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx.$

【解】 (1) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 在 $[0, 1]$ 内只有一个瑕点 $x = 1$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{x}{1-x}} = 1$, $p = \frac{1}{2} < 1$, 所以积分 $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ 收敛. 令 $\sqrt{1-x} = t$, 则 $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int_1^0 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} (-2t) dt = \int_0^1 2\sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$.

(2) $f(x) = \ln \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内只有一个瑕点 $x = 0$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot |\ln \sin x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}} \cdot (\sin x)^{\frac{1}{2}} \cdot |\ln \sin x| = 0,$$

所以积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ 收敛. 下面用两种方法求其值.

$$\begin{aligned} \text{方法一} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \frac{\pi \ln 2}{2} + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \frac{x}{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \frac{x}{2} dx \right) \\ &= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx \right). \end{aligned}$$

在第二个积分中作变换 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 得 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$. 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx, \text{ 因此 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

方法二 设 $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$. 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) d(-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx,$$

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx. \end{aligned}$$

在最后一个积分中作变换 $t = 2x$ 得,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin t dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t dt \right) = A.\end{aligned}$$

于是 $2A = A - \frac{\pi}{2} \ln 2$, $A = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

【例 8-7】 讨论下列无穷积分的收敛性(绝对或条件收敛):

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$;

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$.

【解】 (1) $\forall A > 1$, $\left| \int_1^A \cos x dx \right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2$, 而 $\frac{1}{x}$ 单调趋于 $0 (x \rightarrow +\infty)$, 由狄利克雷判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ 收敛. 注意到

$$\left| \frac{\cos x}{x} \right| \geq \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1 + \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x},$$

同样应用狄利克雷判别法, 知 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ 收敛, 但 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ 发散, 因此 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx$ 发散, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx$ 发散, 从而 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ 条件收敛.

(2) $\forall A > 1$, $\left| \int_0^A \cos x dx \right| \leq 2$, $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ 单调趋于 $0 (x \rightarrow +\infty)$, 由狄利克雷判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$ 收敛. 注意到 $\frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} \geq \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+100} + \frac{\cos 2x}{x+100} \right)$. 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+100} = 1$ 知, $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx$ 发散. 同样应用狄利克雷判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x+100} dx$ 收敛, 从而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx$ 发散, 于是 $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} \right| dx$ 发散, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$ 条件收敛.

(3) $\forall A > 2$, $\left| \int_2^A \sin x dx \right| \leq 2$, $\frac{\ln \ln x}{\ln x}$ 单调趋于 $0 (x \rightarrow +\infty)$, 由狄利克雷

判别法知, $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 收敛. 当 x 充分大时,

$$\left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x \right| \geq \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin^2 x = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \ln x}{\ln x} - \frac{\ln \ln x}{\ln x} \cos 2x \right), \quad \frac{\ln \ln x}{\ln x} \geq \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x},$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} dx$ 发散. 同样应用狄利克雷判别法知, $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \cos 2x dx$ 收

敛, 因此 $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin^2 x dx$ 发散. 用比较判别法得, $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x \right| dx$ 发散.

所以 $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 条件收敛.

【例 8-8】 判别下列积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx.$$

【解】 (1) $x_1 = 0, x_2 = \pi$ 都是 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ 的瑕点, 将积分分成两部分

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} + \int_1^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = I_1 + I_2.$$

对于 I_1 , 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{1}{2}} = 1$, 所以 I_1 收敛.

对于 I_2 , 由于 $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\pi - x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sin(\pi - t)}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^{\frac{1}{2}} = 1$, 所以 I_2 收敛, 故 $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ 收敛.

(2) $f(x) = \sqrt{\tan x} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内只有一个瑕点 $x = \frac{\pi}{2}$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot t}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{t \cos t}{\sin t}} = 1. \end{aligned}$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx$ 收敛.

【例 8-9】 讨论积分 $\int_0^1 x^a \ln x dx$ 的收敛性, 其中 a 是实数.

【解】 ① 当 $\alpha > 0$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$, 所以原积分是正常积分.

② 当 $\alpha = 0$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} |\ln x| = 0$, 原积分收敛.

③ 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, 令 $p = -\alpha$, 则 $0 < p < 1$, 取 $q: p < p + q < 1$, 即 $0 < q < 1 - p$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p+q} \left| \frac{\ln x}{x^p} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^q |\ln x| = 0$, 原积分收敛.

④ 当 $\alpha \leq -1$ 时, 令 $p = -\alpha \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \left| \frac{\ln x}{x^p} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x| = +\infty$, 故原积分发散.

综上所述, 当 $\alpha > -1$ 时原积分收敛, 当 $\alpha \leq -1$ 时, 原积分发散.

【例 8-10】 讨论下列瑕积分的收敛性:

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x};$$

$$(3) \int_0^1 |\ln x|^p dx.$$

【解】 (1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$ 在 $[0, 1]$ 有两个瑕点 $x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx = I_1 + I_2.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = 1$, 所以 I_1, I_2 都收敛, 故 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx$ 收敛.

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = I_1 + I_2. \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2$$

$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos^2 x} = 1$, 故 I_1 发散. 从而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ 发散.

(3) 当 $p \geq 0$ 时, $f(x) = |\ln x|^p$ 在 $[0, 1]$ 上只有一个瑕点 $x = 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p = 0$, 故 $\int_0^1 |\ln x|^p dx$ 收敛. 当 $p < 0$ 时, 取 $\alpha = -p$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x|^p = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|\ln x|^\alpha} = 0, \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow 1^-} |\ln x|^p = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{|\ln x|^\alpha} = +\infty,$$

于是 $f(x) = \frac{1}{|\ln x|^a}$ 在 $[0, 1]$ 上只有一个瑕点 $x = 1$. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \frac{1}{|\ln x|^a} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(-\ln x)^a} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{a(-\ln x)^{a-1} \left(-\frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{a(-\ln x)^{a-1}} = \begin{cases} 1, & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

所以, 当 $a \geq 1$, 即 $p \leq -1$ 时, 原积分发散. 而当 $0 < a < 1$, 即 $-1 < p < 0$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \frac{1}{|\ln x|^a} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{|\ln(1-t)|^a} = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^a \cdot$

$\frac{1}{|\ln x|^a} = 1$, 于是原积分收敛. 综上所述, 当 $p > -1$ 时 $\int_0^1 |\ln x|^p dx$ 收敛, 当 $p \leq -1$ 时 $\int_0^1 |\ln x|^p dx$ 发散.

【例 8-11】 讨论下列积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}.$$

【解】 (1) 若 $p \leq 0$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}-p} \ln(1+x) = +\infty$, 所以原积分发散. 若 $p > 0$, 将积分分为两部分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx = I_1 + I_2.$$

对于 I_1 , 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p-1} \frac{\ln(1+x)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, 所以 $p-1 < 1$, 即 $p < 2$ 时, I_1 收敛. 对于 I_2 , 若 $0 < p \leq 1$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \frac{\ln(1+x)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ 知, 此时 I_2 发散. 若 $p > 1$, 取 $\alpha: 1 < \alpha < p$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{\ln(1+x)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{p-\alpha}} = 0$ 知, 此时 I_2 收敛.

综上所述, 当 $1 < p < 2$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$ 收敛.

$$\begin{aligned}(2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} + \\ &\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} + \int_{\frac{5}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.\end{aligned}$$

对于 I_1 , 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \right| = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, 所以 I_1 收敛;

对于 I_2 , 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} |(x-1)^{\frac{2}{3}}| \cdot \left| \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \right| = 1$, 所以 I_2 收敛;

对于 I_3 , 由于 $\lim_{x \rightarrow 2} |(x-2)^{\frac{1}{3}}| \cdot \left| \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \right| = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, 所以 I_3 收敛;

对于 I_4 , 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} = 1$, 所以 I_4 收敛, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}$ 收敛.

【例 8-12】 判断积分 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ 的收敛性(条件收敛或绝对收敛).

【解】 令 $x^2 = t$, 则 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = I_1 + I_2$.

对于 I_1 , 由于 $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} = 0$, 所以 I_1 收敛. 对于 I_2 , $\left| \int_1^A \sin t dt \right| = |\cos 1 - \cos A| \leq 2$, 而 $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 当 $t \rightarrow +\infty$ 时单调下降趋于 0, 由狄利克雷判别法知, I_2 收敛, 于是原积分收敛. 注意到 $|\sin x^2| \geq \sin^2 x^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x^2)$, 同样应用狄利克雷判别法知, $\int_0^{+\infty} \cos 2x^2 dx$ 收敛, 但 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} dx$ 发散, 于是 $\int_0^{+\infty} \sin^2 x^2 dx$ 发散, 由比较判别法知, $\int_0^{+\infty} |\sin x^2| dx$ 发散, 故 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ 条件收敛.

【例 8-13】 判断积分 $\int_0^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \right] dx$ 的收敛性(条件收敛或绝对收敛).

【解】 $\int_0^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \right] dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\frac{1}{3}} dx - \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \right] dx$. 积分 $\int_0^1 \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\frac{1}{3}} dx$ 是以 $x = 0$ 为瑕点的瑕

积分. 因为 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, 所以 $\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left[\frac{1}{3!}x^2 + o(x^2)\right]^{\frac{1}{3}}$ 与 $x^{\frac{2}{3}}$ 同阶, 故 $\int_0^1 \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} dx$ 收敛. 而 $\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} > 0$, 所以 $\int_0^1 \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} dx$ 绝对收敛. 当 $x > 1$ 时, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{x} < 1$, 利用 $(1+x)^a$ 的麦克劳林公式得,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1 &= 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{\sin x}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{3} \frac{\sin x}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

已知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛, 而 $\int_1^{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ 绝对收敛, 所以 $\int_1^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right] dx$ 条件收敛. 综上所述, $\int_0^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right] dx$ 条件收敛.

【例 8-14】(东南大学 2003 年) 判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 的收敛性, 其中 p 和 q 是参数.

【解】 方法一 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = \int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$.

(i) 当 $p = q$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$. 当 $p < 1$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 当 $p \geq 1$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 发散; 当 $p > 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 当 $p \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散. 所以不论 $p = q$ 取何值, 一定有 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 发散.

(ii) 当 $p \neq q$ 时, 不妨设 $p < q$, 对无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^q \cdot \frac{1}{x^p + x^q} = 1$ 知, 当 $q > 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 收敛; 当 $q \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 发散. 下面讨论当 $q > 1$ 时 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 的收敛性. 若 $p \leq 0$, 则 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 为正常

积分, 当然收敛. 若 $p > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \cdot \frac{1}{x^p + x^q} = 1$ 知, 当 $0 < p < 1$ 时, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 收敛; 当 $p \geq 1$ 时, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 发散.

综上所述, 当 $p < 1 < q$ 或 $q < 1 < p$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 收敛; 在其他情况下, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 发散.

$$\text{方法二} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = I_1 + I_2.$$

对于 I_1 , 不妨设 $\min\{p, q\} = p$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \frac{1}{x^p + x^q} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + x^{q-p}} = 1$ (若 $p = q$, 则该极限为 $\frac{1}{2}$). 所以仅当 $p < 1$, 即 $\min\{p, q\} < 1$ 时, I_1 收敛;

对于 I_2 , 设 $\max\{p, q\} = q$. 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^q \frac{1}{x^p + x^q} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-q} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{q-p} + 1} = 1$ (若 $p = q$, 则该极限为 $\frac{1}{2}$). 所以仅当 $q > 1$, 即 $\max\{p, q\} > 1$ 时, I_2 收敛.

于是, 当 $\min\{p, q\} < 1$, $\max\{p, q\} > 1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 收敛.

§2 含参变量积分

一、基本要求

1. 理解含参变量积分收敛与发散的概念, 理解含参变量广义积分与函数项级数之间的共同点与差异.
2. 掌握含参变量广义积分的一致收敛判别法.
3. 掌握含参变量正常积分、含参变量广义积分的分析性质.

二、主要概念和结论

1. 含参变量正常积分 $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ 的性质

(1) 积分号下取极限及积分交换次序 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域

$[a, b] \times [c, d]$ 连续, 则函数 $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ 在区间 $[a, b]$ 连续, 且

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

(2) 积分号下求导数 设函数 $f(x, y)$ 及 $f_x(x, y)$ 在矩形区域 $[a, b] \times$

$[c, d]$ 连续, 则函数 $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ 在区间 $[a, b]$ 有连续的导函数, 且

$$I'(x) = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

(3) 积分限含参数的情形 设函数 $f(x, y)$ 及 $f_x(x, y)$ 在矩形区域

$[a, b] \times [c, d]$ 连续, 且 $c(x), d(x)$ 在 $[a, b]$ 连续可导, 且 $\forall x \in [a, b]$,

$c \leq c(x), d(x) \leq d$. 则 $I(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 连续可导, 且

$$I'(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x, y) dy + f[x, d(x)]d'(x) - f[x, c(x)]c'(x).$$

2. 含参变量广义积分一致收敛的定义 设 $f(x, y)$ 定义在 $[a, b] \times$

$[c, +\infty)$, 且 $\forall x \in [a, b]$, 无穷积分 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 收敛, 若 $\forall \epsilon$

$> 0, \exists A_0 > c$, 使当 $A > A_0$ 时, $\forall x \in [a, b]$, 有 $\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \epsilon$, 则

称含参变量广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

定义中的区间 $[a, b]$ 可代之以开区间、半开区间、无穷区间等.

含参变量广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 不一致收敛 $\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall A_0$

$> c, \exists A > A_0$ 及 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $\left| \int_A^{+\infty} f(x_0, y) dy \right| \geq \epsilon_0$.

3. 柯西收敛原理 $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A_0 >$

c , 当 $A', A'' > A_0$ 时, $\forall x \in [a, b]$, 有 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dy \right| < \epsilon$.

$\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 非一致收敛 $\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall A_0 > c, \exists A', A'' >$

A_0 及 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x_0, y) dy \right| \geq \epsilon_0$.

4. 一致收敛判别法

(1) M-判别法 设存在函数 $M(y)$ 与常数 $B > c$, 使得当 $y \geq B$ 与 $x \in [a, b]$ 时, 有 $|f(x, y)| \leq M(y)$, 而广义积分 $\int_c^{+\infty} M(y)dy$ 收敛, 则 $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

(2) 狄利克雷判别法 设 (i) 含参变量的正常积分 $\int_c^A f(x, y)dy$ 在 $A \geq c$ 与 $x \in [a, b]$ 有界, 即 $\exists M > 0, \forall A > c, \forall x \in [a, b]$, 有 $|\int_c^A f(x, y)dy| \leq M$; (ii) 对每个固定的 $x \in [a, b]$, 函数 $g(x, y)$ 关于 y 是单调的, 且当 $y \rightarrow +\infty$ 时, $g(x, y)$ 关于 x 在 $[a, b]$ 一致趋向于 0, 则含参变量广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

(3) 阿贝尔判别法 设 (i) $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛; (ii) 对每个固定的 $x \in [a, b]$, 函数 $g(x, y)$ 关于 y 单调, $g(x, y)$ 在 $x \in [a, b]$, $y \geq c$ 有界, 则含参变量的广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

5. 含参变量广义积分的分析性质

(1) 积分号下取极限 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 连续, 若含参变量广义积分 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛, 则 $I(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

(2) 积分交换次序 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 连续, 若含参变量广义积分 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛, 则 $\int_a^b I(x)dx = \int_c^{+\infty} dy \int_a^b f(x, y)dx$, 即

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

(3) 积分号下求导数 设 $f(x, y)$ 和 $f_x(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 连续, 若 $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 收敛, $\int_c^{+\infty} f_x(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛, 则 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 可导, 且 $I'(x) = \int_c^{+\infty} f_x(x, y)dy$, 即

$$\frac{d}{dx} \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} f_x(x, y) dy.$$

三、常用解题方法与典型例题

【例 8.15】 求下列极限:

$$(1) \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + a^2} dx; \quad (2) \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{1}{1+x^2+a^2} dx.$$

【解】 (1) 因 $\sqrt{x^2 + a^2}$ 是连续函数, 故 $F(a) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + a^2} dx$ 是 $-\infty < a < +\infty$ 的连续函数, 因此 $\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + a^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0} F(a) = F(0) = 1$.

(2) 因 $\frac{1}{1+x^2+a^2}$, a , $1+a$ 都是连续函数, 故 $F(a) = \int_a^{1+a} \frac{1}{1+x^2+a^2} dx$ 是 $-\infty < a < +\infty$ 的连续函数, 因此 $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{1}{1+x^2+a^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0} F(a) = F(0) = \frac{\pi}{4}$.

【例 8.16】 求函数 $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^x \sqrt{1-y^2} dy$ 的导数.

【解】 这属于积分限含参数的情形, 利用公式得

$$F'(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-y^2} e^x \sqrt{1-y^2} dy - e^{x|\sin x|} \sin x - e^{x|\cos x|} \cos x.$$

【例 8.17】 求 $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} (n \in \mathbb{N}^+)$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{n})^{\frac{1}{n}}} &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dx}{1 + [(1 + \frac{x}{n})^{\frac{1}{n}}]^n} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} \\ &= \int_1^e \frac{dx}{x(1+x)} = \ln \frac{2e}{1+e}, \end{aligned}$$

故 $J = \ln \frac{2e}{1+e}$.

【例 8.18】 利用积分号下求导法求下列积分:

$$(1) I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx \quad (a > 1);$$

$$(2) I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx \quad (|a| < 1).$$

【解】 (1) $\forall a > 1$, 取 b , 使得 $a > b > 1$, 于是 $f(x, a) = \ln(a^2 - \sin^2 x)$, $f_a(x, a) = \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x}$ 都在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [b, +\infty)$ 连续, 所以

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \frac{1 - \cos 2x}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a}{2a^2 - 1 + \cos 2x} dx. \end{aligned}$$

令 $\tan x = t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a}{2a^2 - 1 + \cos 2x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{a^2 - 1}{a^2} t^2} \cdot \frac{2}{a} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} t\right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \end{aligned}$$

因此 $I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$. 从而 $I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} da = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + C$.

下面确定常数 C .

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx - \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{a^2}\right) dx - \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a}. \end{aligned}$$

令 $a \rightarrow +\infty$, $\pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a} \rightarrow \pi \ln 2$. 又由

$$0 < 1 - \frac{1}{a^2} \leq 1 - \frac{\sin^2 x}{a^2} \leq 1, \quad \ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{a^2}\right) \leq 0 \text{ 知,}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{a^2}\right) dx \right| &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{a^2}\right) \right| dx \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \right| dx = \frac{\pi}{2} \left| \ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \right| \rightarrow 0 (a \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

故 $C = -\pi \ln 2$. 所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}$.

$$(2) I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{1 + a^2 \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + a^2 \tan^2 x} dx.$$

令 $\tan x = t$, 则

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2 t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{\frac{-a^2}{1-a^2}}{1+a^2 t^2} + \frac{\frac{1}{1-a^2}}{1+t^2} \right] dt \\ &= \frac{\pi}{2(1+|a|)}. \end{aligned}$$

从而 $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C_1$ ($0 < a < 1$), $I(a) = -\frac{\pi}{2} \ln(1-a) + C_2$ ($-1 < a < 0$).

由于 $f(x, a) = \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x}$ 在 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $-1 < a < 1$ 连续, 从而 $I(a)$ 在 $-1 < a < 1$ 连续, $I(0) = 0$, 故 $C_1 = C_2 = 0$, 于是 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \ln(1+|a|)$.

【例 8-19】 计算积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0);$$

$$(2) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

【解】 (1) 方法一 函数 $y(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ 在 $x=0$ 及 $x=1$ 处无定义. 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a$. 定义, 当 $x=0$ 时, $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$, 当 $x=1$ 时, $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a$. 则 $y(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ 在 $[0, 1]$ 连续. 又已知 $y(x) = \int_a^b x^y dy$, 而函数 $f(x, y) = x^y$ 在矩形区域 $[0, 1] \times [a, b]$ 连续, 根据积分交换次序定理, 有 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{1+b}{1+a}$.

方法二 令 $I = I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$. 由积分号下求导数定理得, $\frac{\partial I}{\partial b} = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{1+b}$. 所以 $I(a, b) = \ln(1+b) + C(a)$, $\frac{\partial I}{\partial a} = C'(a)$. 同

理可得, $\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^1 -x^a dx = -\frac{1}{1+a}$. 所以 $C'(a) = -\frac{1}{1+a}$, $C(a) = \ln \frac{1}{1+a} + C_1$. 故 $I(a, b) = \ln \frac{1+b}{1+a} + C_1$. 令 $a = b$, 可得 $C_1 = 0$. 故 $I(a, b) = \ln \frac{1+b}{1+a}$.

(2) 不妨设 $a < b$, $\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx$. 事实上由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$, 可补充定义, 当 $x = 0$ 及 $x = 1$ 时, $x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) = 0$, 从而 $x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right)$ 在 $0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b$ 连续. 应用积分交换次序定理得, 原式 $= \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx$. 作代换 $x = e^{-t}$, 可得 $\int_0^1 x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t} \sin t dt = \frac{1}{1+(1+y)^2}$, 于是, 原式 $= \int_a^b \frac{dy}{1+(1+y)^2} = \arctan(1+b) - \arctan(1+a)$.

【例 8-20】 求 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} dx (a > b > 0)$.

【解】 $f(x, y) = \frac{2ab \sin x}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x}$ 在矩形区域 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1]$ 连续, 而 $\ln \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} = \int_0^1 \frac{2ab \sin x}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x} dy$, 应用积分交换次序定理得,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^1 \frac{2ab \sin x}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x} dy = \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ab \sin x}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x} dx = \pi \arcsin \frac{b}{a}.$$

【例 8-21】 证明 $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$.

【证明】 方法一 $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right), \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$, 所以

$$\text{左端} = \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4},$$

而右端 $= \int_0^1 -\frac{x}{x^2+y^2} \Big|_0^1 dy = -\int_0^1 \frac{1}{y^2+1} dy = -\frac{\pi}{4}$, 故左端 \neq 右端.

方法二 令 $y = x \tan t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy &= \int_0^{\arctan \frac{1}{x}} \frac{x^2-x^2 \tan^2 t}{(x^2+x^2 \tan^2 t)^2} \cdot x \sec^2 t dt \\ &= \int_0^{\arctan \frac{1}{x}} \frac{1}{x} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = \frac{1}{2x} \sin \left(2 \arctan \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

令 $x = y \tan t$, 则 $\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = -\frac{1}{2y} \sin \left(2 \arctan \frac{1}{y} \right)$, 于是

左端 $= \int_0^1 \frac{1}{2x} \sin \left(2 \arctan \frac{1}{x} \right) dx$, 右端 $= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2y} \right) \sin \left(2 \arctan \frac{1}{y} \right) dy$.

$f(x) = \frac{1}{2x} \sin \left(2 \arctan \frac{1}{x} \right) > 0, \forall x \in [0, 1]$. 故左端 \neq 右端.

【例 8-22】 设 $f(x)$ 为可微函数, 求函数 $F(x) = \int_a^b f(y) |x-y| dy$ ($a < b$) 的二阶导数.

【解】 当 $x \in (a, b)$ 时, 由于 $F(x) = \int_a^x f(y)(x-y) dy + \int_x^b f(y)(y-x) dy$, 故

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(y)(x-y) dy - \frac{d}{dx} \int_x^b f(y)(y-x) dy \\ &= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} [f(y)(x-y)] dy - \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} [f(y)(y-x)] dy \\ &= \int_a^x f(y) dy + \int_x^b f(y) dy, \end{aligned}$$

从而 $F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$.

当 $x \in (a, b)$ 时, 例如 $x \leq a$, 则 $F(x) = \int_a^b f(y)(y-x) dy$,

故 $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [f(y)(y-x)] dy = -\int_a^b f(y) dy$, 从而 $F''(x) = 0$.

同理, 对于 $x \geq b$ 也可得 $F''(x) = 0$.

综上所述, $F''(x) = \begin{cases} 2f(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$.

【例 8-23】 设 $F(x) = \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \cos(x \sin \theta) d\theta$, 求证 $F(x) \equiv 2\pi$.

【证明】 因为 $F(0) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, 要证 $F(x) = 2\pi$, 只须证 $F(x)$ 为常

数.

$$F'(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} [e^{x \cos \theta} \cos(x \sin \theta)] d\theta = \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \cos(\theta + x \sin \theta) d\theta, \text{ 由此}$$

$$F''(x) = \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \cos(2\theta + x \sin \theta) d\theta, \text{ 用数学归纳法, } \forall n \in \mathbb{N}^+, \text{ 有}$$

$$F^{(n)}(x) = \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \cos(n\theta + x \sin \theta) d\theta, \text{ 因此 } F^{(n)}(0) = 0 \ (n = 1, 2, \dots). \text{ 由泰}$$

$$\text{勒公式, } F(x) - F(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{1}{n!} \cdot F^{(n)}(\theta_1 x) x^n = \frac{1}{n!} \cdot F^{(n)}(\theta_1 x) x^n$$

$$(0 \leq \theta_1 \leq 1). \text{ 又 } |F^{(n)}(\theta_1 x)| \leq e^x \cdot 2\pi, \text{ 故 } \left| \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta_1 x) x^n \right| \leq \frac{2\pi e^x x^n}{n!} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty). \text{ 故 } F(x) = F(0) \equiv 2\pi.$$

【例 8-24】 讨论下列积分在指定区间的一致收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-ax^2} dx \ (0 \leq a \leq +\infty);$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx, \quad (I) \ a < a < b, \quad (II) \ -\infty < a < +\infty.$$

【解】 (1) 方法一 设 $I(a) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-ax^2} dx$, 由于 $I(0) = 0$, 而当 $a > 0$ 时, 作变换 $t = \sqrt{ax}$ 可得, $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\lim_{a \rightarrow 0} I(a) \neq I(0)$, 故 $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-ax^2} dx$ 在 $0 \leq a \leq +\infty$ 不一致收敛.

方法二 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \int_1^2 e^{-t^2} dt > 0$, $\forall N > 0$, 取 $a_0 = \frac{1}{2N^2}$, $A' = \sqrt{2}N$, $A'' = 2\sqrt{2}N$, 则 $A', A'' > N$, $a_0 \in [0, +\infty)$, 而 $\left| \int_{A'}^{A''} \sqrt{a_0} e^{-a_0 x^2} dx \right| = \int_1^2 e^{-t^2} dx \geq \epsilon_0$, 因此 $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-ax^2} dx$ 在 $0 \leq a < +\infty$ 不一致收敛.

(2) 对任何固定的 a , $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 都收敛, 令 $x - a = t$, 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

(I) 取正数 R 充分大, 使 $-R < a < b < R$. 显然, 当 $|x| \geq R$ 时, 对一切 $a < a < b$, 有 $0 < e^{-(x-a)^2} < e^{-(|x|-R)^2}$, 显然积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x|-R)^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-(x-R)^2} dx$ 收敛, 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 对 $a < a < b$ 一致收敛.

(II) $\forall A > 0$, 有 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_A^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{A-a}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

故 $\forall A > 0$, 可取 a 充分大, 使得 $\int_A^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; 由此可知 $\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$

在 $-\infty < a < +\infty$ 不一致收敛, 当然 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $-\infty < a < +\infty$ 不一致收敛.

【例8-25】 (大连理工大学 2000年) 设 $f(x, y)$ 于 $(-\infty, +\infty) \times [a, b)$ 连续, $I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ 于 $y \in [a, b)$ 收敛, 但 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, b) dx$ 发散. 证明 $I(y)$ 于 $y \in [a, b)$ 非一致收敛.

分析 由柯西原理只需证 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall A_0 \in (-\infty, +\infty), \exists A'' > A' > A_0$, 及 $y \in [a, b)$ 使得 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| \geq \epsilon_0$. 又因为

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_{A'}^{A''} [f(x, y) - f(x, b)] dx + \int_{A'}^{A''} f(x, b) dx \right| \\ &\geq \left| \int_{A'}^{A''} f(x, b) dx \right| - \left| \int_{A'}^{A''} [f(x, y) - f(x, b)] dx \right|. \end{aligned}$$

所以只需证 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x, b) dx \right| \geq 2\epsilon_0, \left| \int_{A'}^{A''} [f(x, y) - f(x, b)] dx \right| < \epsilon_0$.

【证明】 方法一 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, b) dx$ 发散, 故 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall A_0 \in (-\infty, +\infty), \exists A'' > A' > A_0$, 使得 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x, b) dx \right| \geq 2\epsilon_0$. 因 $f(x, y)$ 于 $(-\infty, +\infty) \times [a, b)$ 连续, 补充定义 $f(x, b) = \lim_{y \rightarrow b^-} f(x, y)$, 则 $f(x, y)$ 于 $(-\infty, +\infty) \times [a, b]$ 连续, 从而 $f(x, y)$ 在有界闭区域 $[A', A''] \times [a, b]$ 一致连续. 于是对上述 $\epsilon_0 > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x' - x''| < \delta, |y' - y''| < \delta$, 且 $x', x'' \in [A', A''], y', y'' \in [a, b]$ 时, 有 $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\epsilon_0}{A'' - A'}$. 从而, $|y - b| < \delta$ 时, 有 $|f(x, y) - f(x, b)| < \frac{\epsilon_0}{A'' - A'}$, 故 $\left| \int_{A'}^{A''} [f(x, y) - f(x, b)] dx \right| < \epsilon_0$. 结论得证.

方法二 用反证法. 设 $I(y)$ 在 $[a, b)$ 一致收敛, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N > a$, 当 $A', A'' > N$ 时, $\forall y \in [a, b)$, 有 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| < \epsilon$. 令 $y \rightarrow b^-$, 得 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x, b) dx \right| \leq \epsilon (A', A'' > N)$. 这与 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, b) dx$ 发散矛盾. 故

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ 在 $[a, b)$ 不一致收敛.

【例 8-26】 证明含参变量广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xy} \cos y}{y^p} dy (p > 0)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 一致收敛.

【证明】 $\left| \int_1^A \cos y dy \right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2$. 当 $0 \leq x < +\infty$ 时, 函数 $\frac{e^{-xy}}{y^p}$ 在 $y \geq 1$ 时关于 y 单调下降, 且当 $y \rightarrow +\infty$ 时关于 $x (0 \leq x < +\infty)$ 一致趋于 0. 由狄利克雷判别法知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy} \cos y}{y^p} dy$ 在 $0 \leq x < +\infty$ 一致收敛.

【例 8-27】 证明含参变量积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx$ 关于 $p \in [0, +\infty)$ 一致收敛.

【证明】 由于 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ 收敛, 又 $\frac{1}{1+x^p} (p \geq 0)$ 在 $x \geq 0$ 对 x 单调下降且一致有界, 即 $0 < \frac{1}{1+x^p} \leq 1 (p \geq 0, x \geq 0)$, 由阿贝尔判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx$ 在 $p \geq 0$ 时一致收敛.

【例 8-28】 判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin yx}{1+x^2} dx, y \in [\delta, +\infty) (\forall \delta > 0)$ 的一致收敛性.

【解】 $\forall A > 0, \left| \int_0^A \sin(yx) dx \right| < M$, 其中 $M = \frac{2}{\delta}$. 又 $\frac{x}{1+x^2}$ 是单调的, 且一致趋向于 0 ($x \rightarrow +\infty$), 由狄利克雷判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin yx}{1+x^2} dx$ 在 $[\delta, +\infty) (\forall \delta > 0)$ 一致收敛.

【例 8-29】 讨论函数 $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^x} dy$ 在 $(3, +\infty)$ 的连续性.

【解】 考察积分 $\int_1^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^x} dy$. 任取 $x_0 > 3$. 由于当 $y \geq 1, x \geq x_0 > 3$ 时, $0 < \frac{y^2}{1+y^x} < \frac{y^2}{y^x} = \frac{1}{y^{x-2}} \leq \frac{1}{y^{x_0-2}}$, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{x_0-2}} dy$ 收敛, 由 M -判别法知, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^x} dy$ 在 $[x_0, +\infty)$ 一致收敛, 从而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^x} dy$ 在 $[x_0, +\infty)$ 一致收敛, 所以 $F(x)$ 当 $x \geq x_0$ 时连续. 由 $x_0 > 3$ 的任意性知, $F(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 连续.

【例 8-30】 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-at}}{t} \cos t dt$.

【解】 令 $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-at}}{t} \cos t dt$, 由于 $\left| \int_0^A \cos t dt \right| = |\sin A| \leq 1$, 对每个固定的 $a \in [0, +\infty)$, $\frac{1-e^{-at}}{t}$ 关于 t 是单调的, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1-e^{-at}}{t}$ 在 $a \in [0, +\infty)$ 一致趋于 0, 故 $I(a)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致收敛, 应用积分号下求导数定理, 得

$I'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos t dt = -a - a^2 \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos t dt$, 从而 $I'(a) = \frac{-a}{1+a^2}$, 进而

$I(a) = -\frac{1}{2} \ln(1+a^2) + C$, 由于 $I(0) = 0$ 知, $C = 0$. 故 $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} \cos t dt = I(1) = -\frac{1}{2} \ln 2$.

【例 8-31】 计算积分: (1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx (a > 0)$;

(2) $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx (a > 0)$.

【解】 (1) 令 $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$, 由 $e^{-ax^2} \cos bx$ 与 $\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2} \cos bx) = -x e^{-ax^2} \sin bx$ 都在 $[0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ 连续, 并且 $|e^{-ax^2} \cos bx| \leq e^{-ax^2}$, $|x e^{-ax^2} \sin bx| \leq x e^{-ax^2}$, 而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} dx$ 都收敛, 故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx$ 都在 $-\infty < b < +\infty$ 一致收敛. 应用积分号下求导数定理, 得

$$\begin{aligned} I'(b) &= - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx \\ &= \frac{1}{2a} (e^{-ax^2} \sin bx \Big|_0^{+\infty} - b \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx) \\ &= -\frac{b}{2a} I(b). \end{aligned}$$

于是 $\int \frac{I'(b)}{I(b)} db = \int -\frac{b}{2a} db$, 即 $\ln I(b) = -\frac{b^2}{4a} + C (-\infty < b < +\infty)$, 从而 $I(b) = I(0) e^{-\frac{b^2}{4a}}$, 而 $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 因此, $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

$$(2) \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx = -\frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \sin bx de^{-ax^2} = \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx. \text{ 由}$$

$$(1) \text{ 得 } \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx = \frac{b}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

【例 8.32】 利用 $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy (x > 0)$, 计算积分

$$F = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \text{ 和 } F_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

【解】 在积分 $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy$ 两端乘以 $\sin x$, 再在 $0 < x_0 \leq x \leq x_1$ 积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dy \int_{x_0}^{x_1} \sin x \cdot e^{-xy^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-xy^2} (y^2 \sin x + \cos x)}{1+y^4} \right] \Big|_{x_0}^{x_1} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_0 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_0 y^2}}{1+y^4} dy + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_0 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_0 y^2}}{1+y^4} dy - \\ &\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_1 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy. \end{aligned}$$

因为 $e^{-x_0 y^2} \leq 1$, $e^{-x_1 y^2} \leq 1$, 且积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy$ 及 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4} dy$ 均收敛, 故上述等式右端的积分分别对 $0 \leq x_0 < +\infty$, $0 \leq x_1 < +\infty$ 都是一致收敛的, 从而它们分别都是 $0 \leq x_0 < +\infty$, $0 \leq x_1 < +\infty$ 的连续函数. 令 $x_0 \rightarrow 0^+$, 可在积分号下取极限, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_1 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_1 y^2}}{1+y^2} dy - \\ &\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy. \end{aligned}$$

由于上式右端的后两个积分均不超过积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x_1 y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x_1}}$. 令

$x_1 \rightarrow +\infty$, 得 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 综上所述,

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{同理可得, } \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

§3 综合例题

【例 8-33】 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上的可微函数, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 单调下降趋于 0, 若积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则积分 $\int_1^{+\infty} xf'(x) dx$ 收敛.

【证明】 由例 8-5 知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$. 又 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > a$, 当 $u_1, u_2 > A$ 时, $|u_1 f(u_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|u_2 f(u_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. 从而

$$\begin{aligned} \left| \int_{u_1}^{u_2} xf'(x) dx \right| &= \left| \left| xf(x) \right|_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right| \\ &= \left| u_2 f(u_2) - u_1 f(u_1) - \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right| \\ &\leq |u_2 f(u_2)| + |u_1 f(u_1)| + \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由柯西收敛原理知, $\int_1^{+\infty} xf'(x) dx$ 收敛.

【例 8-34】 证明无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛 \Leftrightarrow 对任一趋于 $+\infty$ 的单调增加数列 $\{x_n\}$ (其中 $x_1 = a$), 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【证明】 必要性. 任取趋于 $+\infty$ 的单调增加数列 $\{x_n\}$ (其中 $x_1 = a$), 因为 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 故 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_{n+1}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$
 $= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$ 收敛, 且收敛于同一个数.

充分性. 设对任一趋于 $+\infty$ 的单调增加数列 $\{x_n\}$ (其中 $x_1 = a$), 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$ 的部分和数列 $\left\{ \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right\}$ 或 $\left\{ \int_a^{x_{n+1}} f(x) dx \right\}$ 也收敛于同一个数. 根据海涅定理, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ 存在, 即广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且收敛于同一个数.

注 (1) 把无穷限积分与级数作形式上的比较是很有意义的, 本例说明, 无穷限积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 就相当于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$, 定积分 $\int_a^A f(x) dx$ 就相当于级数的部分和 $\sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$. 因此, 关于级数的性质和收敛性判别法大部分可相应地转移到无穷限积分上来.

(2) 同理可证, 含参变量广义积分 $I(x) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛 \Leftrightarrow 对任一趋于 $+\infty$ 的单调上升数列 $\{A_n\}$, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛 (其中 $A_1 = c$). 事实上, 对任给的趋于 $+\infty$ 的单调上升数列 $\{A_n\}$, 由于 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛, 故 $\forall \epsilon > 0, \exists A_0 > c, \forall A > A_0, \forall x \in [a, b], \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \epsilon$. 对上述 $A_0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 使当 $n > N$ 时, $A_n > A_0$, 从而 $\forall n > N, \forall x \in [a, b], \left| \int_{A_n}^{+\infty} f(x, y) dy \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x, y) dy \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x) \right| < \epsilon$, 这就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛. 充分性用反证法即可证明.

【例 8-35】 (大连理工大学 2001 年) 证明若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$, 则 $\lambda = 0$.

【证明】 方法一 用反证法. 假设 $\lambda \neq 0$, 不妨设 $\lambda > 0$ (对于 $\lambda < 0$ 情形类似可证).

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda > 0$, 则对 $\varepsilon_0 = \frac{\lambda}{2} > 0$, $\exists A > \max\{0, a\}$, 当 $x > A$ 时, 有 $|f(x) - \lambda| < \varepsilon_0$. 于是, 当 $x > A$ 时, $f(x) > \frac{\lambda}{2}$. 从而 $\int_A^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾. 故 $\lambda = 0$.

方法二 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$ 存在且有限, 由例 2-16 知, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续, 再根据例 8-4 可得 $\lambda = 0$.

【例 8-36】(东南大学 2003 年) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛, 求证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

【证明】方法一 因为 $f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a)$, $x \in [a, +\infty)$, 由 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ 存在有限, 再由例 8-35 得, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

方法二 由于积分 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛, 根据柯西原理, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > a$, $\forall x_1, x_2 > A$, 有 $\left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx \right| = |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. 于是 $\forall \{x_n\} \rightarrow +\infty$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n, m > N$ 时, 有 $x_n, x_m > A$, 从而 $\left| \int_{x_m}^{x_n} f'(x)dx \right| = |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, 这表明 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 故由海涅定理, 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ 存在有限, 由例 8-35 得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

方法三 用反证法. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 及 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $|f(x_n)| > \varepsilon_0$. 设 $\{f(x_n)\}$ 中有无穷多项为正(无穷多项为负类似可证), 则可将负项去掉. 不妨设 $f(x_n) > \varepsilon_0 (n = 1, 2, \dots)$. 因 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛, 知 $\exists \{x'_m\}: x'_m \rightarrow +\infty$, 使得 $f(x'_m) < \frac{\varepsilon_0}{2}$, $m = 1, 2, \dots$ (若不然, 则 $\exists G > 0$, $\forall x > G$, 恒有 $f(x) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$, 于是 $A > G$ 时, $\int_A^{2A} f(x)dx \geq \frac{\varepsilon_0}{2}A \rightarrow +\infty$ ($A \rightarrow +\infty$), 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾). 于是 $\forall n, m$, 有 $\left| \int_{x'_m}^{x_n} f'(x)dx \right| = |f(x_n) - f(x'_m)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$. 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛矛盾.

【例 8-37】 判别积分 $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} dx$ 的敛散性.

【解】 令 $\frac{1}{x} = t$, 原式 $= \int_1^0 -\ln(1-t^2) \cdot \frac{-1}{t^2} dt = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$. 又 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \right] = -1$, 所以 $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$ 在 $[0, 1]$ 内只有一个瑕点 $t = 1$, 由于

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t) + \ln(1+t)}{t^2} = 0$$

所以原积分收敛.

【例 8-38】 讨论瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$ 的收敛性.

【解】 当 $m \leq 0$ 时, 原积分为正常积分. 当 $m > 0$ 时, $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^m}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内只有一个可能的瑕点 $x = 0$. 若 $0 < m \leq 2$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^m} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]}{x^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^m} \\ &= \begin{cases} 0, & 0 < m < 2 \\ \frac{1}{2}, & m = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $x = 0$ 不是瑕点, 故原积分收敛. 若 $m > 2$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{m-2} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. 所以当 $0 < m - 2 < 1$, 即 $2 < m < 3$ 时, 原积分收敛; 当 $m - 2 \geq 1$, 即 $m \geq 3$ 时原积分发散. 综上所述, 当 $m < 3$ 时原积分收敛, 当 $m \geq 3$ 时原积分发散.

【例 8-39】 设瑕积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛 ($x = 0$ 是瑕点), 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调, 求证 $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

【证明】 不妨设 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调减少, $f(x) \geq 0$, 于是

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.
\end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 f(x) dx$ 存在, 在上面的不等式中令 $n \rightarrow \infty$, 由极限的夹迫准则知,

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

【例 8-40】 若 $xf(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调下降, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$, 且积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$, 求证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) \ln x = 0$.

【证明】 由 $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$ 知, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} f(t) dt = 0$. 又由 $xf(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调下降, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ 知, $\int_x^{+\infty} f(t) dt = \int_x^{+\infty} t f(t) \frac{dt}{t} \geq \int_x^{+\infty} xf(x) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} xf(x) \ln x \geq 0$, 因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) \ln x = 0$.

【例 8-41】 已知 $f(x) > 0$ 且单调下降, 证明积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 同时收敛或同时发散.

分析 将无穷积分转化为级数来间接地判别其敛散性.

【证明】 因 $\sin^2 x \leq 1$, 则由 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛可以推出 $\int_a^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 收敛. 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散, $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x) dx$, 由 $f(x) > 0$ 且单调下降, 所以 $\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x) dx \leq \pi f(a+n\pi)$, 因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n\pi)$ 发散. 而

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x) \sin^2 x dx \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(a+(n+1)\pi) \sin^2 x dx
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f(a + (n+1)\pi).$$

从而 $\int_a^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 发散.

【例 8-42】 证明(1) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - k) \ln \frac{b}{a} \quad (b > a > 0).$$

(2) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在, 但 $\int_c^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 对某一 $c > 0$ 存在, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (b > a > 0).$$

【证明】 (1) 任取 $\delta > 0$, $A > \delta$, $\int_{\delta}^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x} dx = f(\xi) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{1}{x} dx - f(\eta) \int_{aA}^{bA} \frac{1}{x} dx = [f(\xi) - f(\eta)] \ln \frac{b}{a}$. 其中 $\delta a \leq \xi \leq \delta b$, $Aa \leq \eta \leq Ab$, 因此 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \xi = 0$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \eta = +\infty$. 所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{\delta}^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - k) \ln \frac{b}{a}.$$

(2) 由 $\int_c^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛知, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x} dx = 0$. 因此在(1)的推导中, 最后的极限将少去第二项, 只剩下 $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(\xi) \ln \frac{b}{a} = f(0) \ln \frac{b}{a}$.

注 本例中的积分称为傅茹兰尼积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0).$$

【例 8-43】 (大连理工 2002 年) 设 $f(x)$ 于 $[a, +\infty)$ 绝对可积. 证明 $I(u) = \int_a^{+\infty} f(x) \sin ux dx$ 于 $u \in (-\infty, +\infty)$ 一致连续.

【证明】 由于当 $a < x < A$ 时 ($A > \max\{a, 0\}$),

$$|\sin u_1 x - \sin u_2 x| = 2 \left| \cos \frac{u_1 + u_2}{2} x \sin \frac{u_1 - u_2}{2} x \right| \leq |u_1 - u_2| A, \text{ 故}$$

$$|I(u_1) - I(u_2)| = \left| \int_a^{+\infty} f(x) \sin u_1 x dx - \int_a^{+\infty} f(x) \sin u_2 x dx \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_a^{+\infty} |f(x)| |\sin u_1 x - \sin u_2 x| dx \\ &\leq 2 \int_A^{+\infty} |f(x)| dx + |u_1 - u_2| A \cdot \int_a^A |f(x)| dx. \end{aligned}$$

已知 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 设为 B , 所以取 $A > \max\{a, 0\}$ 充分大时, 使

$$2 \int_A^{+\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2AB}$, 则当 $|u_1 - u_2| < \delta$ 时, 有

$$|u_1 - u_2| A \cdot \int_a^A |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$|I(u_1) - I(u_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

【例 8.44】 由积分 $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$ 计算 $p(b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx$.

【解】 取定 $a > 0$, 令 $J(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$, $J'(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$. 由于 $e^{-ax} \cos bx$ 当 $x \geq 0, b \geq 0$ 时连续, 且 $|e^{-ax} \cos bx| \leq e^{-ax} (a > 0)$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛, 由 M -判别法知, $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$ 关于 $b \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛. 故

$$J'(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

又当 $b = 0$ 时, $J(b) = 0$, 因此

$$J(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx = \int_0^b \frac{a}{t^2 + a^2} dt = \arctan \frac{b}{a}.$$

易知, $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$ 在 $0 \leq a \leq +\infty$ 一致收敛, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \arctan \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} b$.

【例 8.45】 计算积分 $I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}$ (其中 $n \in \mathbb{N}^+, a > 0$).

【解】 $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{x^2 + a} \right) = -\frac{1}{(x^2 + a)^2}$. 当 $x \geq 0, a \geq a_0 > 0$ 时, $\frac{1}{(x^2 + a)^2} \leq \frac{1}{(x^2 + a_0)^2}$, 而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a_0)^2}$ 收敛, 从而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^2}$ 在 $[a_0, +\infty)$

∞) 一致收敛. 故 $\frac{d}{da} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{x^2+a} \right) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^2}$. 由 $a_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $a > 0$ 均成立. 同理对 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a}$ 逐次求导, 得

$$\frac{d^n}{da^n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}.$$

利用公式 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ ($a > 0$), 得 $\frac{d}{da} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{d}{da} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \right) = -\frac{\pi}{2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}$, $\frac{d^2}{da^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{d}{da} \left(-\frac{\pi}{2^2} \frac{1}{\sqrt{a^3}} \right) = \frac{1 \cdot 3\pi}{2^3} \frac{1}{\sqrt{a^5}}$, ... 由数学归纳法, 得

$$\frac{d^n}{da^n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-(n+\frac{1}{2})}. \text{ 所以}$$

$$I_n(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-(n+\frac{1}{2})}.$$

【例 8-46】 设 $I(a, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{\beta^2+x^2} dx$ ($a > 0, \beta > 0$),

- (1) $\forall b > 0$, 证明广义积分 $I(a, \beta)$ 关于 $a \in [0, b]$ 一致收敛;
- (2) 求广义积分 $I(a, \beta)$ 的值;

(3) 求 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$.

【解】 (1) 对于 $0 \leq a \leq b$,

$$0 \leq \frac{\ln(1+a^2x^2)}{\beta^2+x^2} \leq \frac{\ln(1+b^2x^2)}{\beta^2+x^2} \quad (0 \leq x < +\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+b^2x^2)}{\beta^2+x^2} dx$ 收敛. 所以广义积分 $I(a, \beta)$ 关于 $a \in [0, b]$ 一致收敛. (2) 于是 $I(a, \beta)$ 是 $0 \leq a \leq b$ 上的连续函数. 由 $b > 0$ 的任意性知, $I(a, \beta)$ 当 $0 \leq a < +\infty$ 时连续.

$$\text{由 } 0 \leq \frac{2ax^2}{(\beta^2+x^2)(1+a^2x^2)} \leq \frac{2bx^2}{(\beta^2+x^2)(1+a_0^2x^2)} \quad \left(\begin{array}{l} (0 \leq x < +\infty) \\ 0 < a_0 \leq a \leq b \end{array} \right),$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2bx^2}{(\beta^2+x^2)(1+a_0^2x^2)} dx$ 收敛. 故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\ln(1+a^2x^2)}{\beta^2+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2ax^2}{(\beta^2+x^2)(1+a^2x^2)} dx = \frac{\pi}{a\beta+1},$$

当 $0 < a_0 \leq a \leq b$ 时是一致收敛的. 于是, 当 $0 < a_0 \leq a \leq b$ 时, 在积分号

下求导数得, $I'_a(a, \beta) = \frac{\pi}{a\beta + 1}$. 由 a_0 与 b 的任意性知, 上式对一切 $0 < a < +\infty$ 均成立. 两端积分, 得 $I(a, \beta) = \frac{\pi}{\beta} \ln(1 + a\beta) + C$ ($0 < a < +\infty$), 令 $a \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到 $I(a, \beta)$ 在 $0 \leq a < +\infty$ 上连续, 得 $0 = I(0, \beta) = 0 + C$, 故 $C = 0$. 于是

$$I(a, \beta) = \frac{\pi}{\beta} \ln(1 + a\beta) \quad (0 \leq a < +\infty). \quad (3) \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \ln 2.$$

【例 8-47】 设 $I(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$ ($a \geq 0$). 证明 $I(a)$ 可微并求出 $I(a)$.

【解】 易知 $I(0) = 0$. 当 $a > 0$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \frac{\arctan ax}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}$, 故 $I(a)$ 收敛. 易知

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\arctan ax}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \right) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + a^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + a^2)} \end{aligned}$$

对 $a \geq 0$ 一致收敛. 利用积分号下求导得,

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_1^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\arctan ax}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \right) dx = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + a^2)} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} - a^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + a^2)} = \frac{\pi}{2} - a^2 \cdot \frac{\pi}{2a \sqrt{a^2 + 1}} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{a\pi}{2 \sqrt{a^2 + 1}} \quad (a \geq 0). \end{aligned}$$

从而有 $I(a) = \frac{\pi}{2} a - \frac{\pi}{2} \int \frac{a da}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{\pi}{2} a - \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + a^2} + C$ ($a \geq 0$), 其中 C 为待定系数.

令 $a = 0$, 得 $I(0) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C$, 故 $C = \frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\pi}{2} (1 + a - \sqrt{a^2 + 1}) \quad (a \geq 0).$$

【例 8-48】 (东南大学 2004 年) 设 $p > 0$, 判别积分 $F(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x \arctan x}{x^p} dx$ 的敛散性, 包括绝对收敛, 条件收敛和发散, 并证明 $F(p)$

当 $p > 0$ 时连续.

【证明】 首先讨论积分的敛散性. 当 $p > 1$ 时, 由于

$$\left| \frac{\cos x \arctan x}{x^p} \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^p}, \quad \forall x \geq 1,$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 故积分 $F(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x \arctan x}{x^p} dx$ 当 $p > 1$ 时绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 令 $g(x) = \frac{\arctan x}{x^p}$, 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{x^p}{1+x^2} - px^{p-1} \arctan x}{x^{2p}} = \frac{x - p(1+x^2) \arctan x}{x^{1+p}(1+x^2)} \\ &\leq \frac{x - p(1+x^2) \frac{\pi}{4}}{2}, \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

而当 x 充分大时, $\frac{x - p(1+x^2) \frac{\pi}{4}}{2} < 0$. 从而当 x 充分大时, $g'(x) < 0$,

$g(x)$ 单调下降. 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^p} = 0$; 又 $\forall A > 1$, $\left| \int_1^A \cos x dx \right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2$. 根据狄利克雷判别法, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x \arctan x}{x^p} dx$ 收敛. 又

$$\left| \frac{\cos x \arctan x}{x^p} \right| \geq \frac{\frac{\pi}{4} \cos^2 x}{x^p} = \frac{\pi}{8x^p} + \frac{\pi \cos 2x}{8x^p},$$

同样应用狄利克雷判别法知, 当

$0 < p \leq 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\pi \cos 2x}{8x^p} dx$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{8x^p} dx$ 发散. 从而 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x \arctan x}{x^p} \right| dx$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散. 所以当 $0 < p \leq 1$ 时, 原积分条件收敛.

下证 $F(p)$ 当 $p > 0$ 时连续. $\forall p_0 \in (0, +\infty)$, 由于 $\left| \frac{\cos x \arctan x}{x^p} \right| \leq$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos x}{x^2}, \quad x > 1. \text{ 积分 } \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ 收敛, 由狄利克雷判别法知,}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x \arctan x}{x^p} dx$ 在 $\left[\frac{p_0}{2}, 2p_0 \right]$ 上一致收敛. 又函数 $\frac{\cos x \arctan x}{x^p}$ 在 $[1, +\infty)$

$\times \left[\frac{p_0}{2}, 2p_0 \right]$ 连续, 故 $F(p)$ 在 $\left[\frac{p_0}{2}, 2p_0 \right]$ 上连续, 从而 $F(p)$ 在 p_0 连续. 由 $p_0 > 0$ 的任意性知, $F(p)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续.

【例 8.49】 设 $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^2)} dx$ ($0 \leq a < +\infty$), 证明

$$(1) F'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx;$$

$$(2) F'(a) = F(a) - \frac{\pi}{2} \quad (a > 0).$$

【证明】 先讨论三个反常积分:

$$\textcircled{1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^2)} dx; \quad \textcircled{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx;$$

$$\textcircled{3} \int_0^{+\infty} \frac{-x \sin ax}{1+x^2} dx \quad (-\infty < a < +\infty).$$

由 $\left| \frac{\sin ax}{x(1+x^2)} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} (x \geq 1)$, $\left| \frac{\cos ax}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ 知, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 两个积分对 $-\infty < a < +\infty$ 一致收敛. 由于 $\frac{-x}{1+x^2}$ 单调趋于零及 $\sin ax$ 的积分有界性知, $\textcircled{3}$ 积分对 $a > 0$ 内闭一致收敛. 由含参变量的反常积分的求导法则, 得 $F'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$, $F'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{-x \sin ax}{1+x^2} dx = F(a) - \frac{\pi}{2}$. 此处利用了 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

附录 1 《数学分析简明教程》典型习题解答

第二章 函 数

§ 1 函数的概念

2. 见例 1-24. 3. 见例 1-1. 10. 见例 1-2.
11. 见例 1-3. 13. 见例 1-4. 14. 见例 1-5.

§ 2 复合函数与反函数

4. 见例 1-6.

第三章 极限与函数的连续性

§ 2 数列的极限

1. 用定义证明下列数列的极限为零: ((6)(7) 小题见例 1-8 和例 1-9)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1}$; (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

(10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + a^{-n} \right) \quad (a > 1)$.

【证明】 (1) $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{2}{\epsilon} \right] + 1$, $\forall n > N$, $\left| \frac{n+1}{n^2+1} - 0 \right| =$
 $\frac{n+1}{n^2+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \epsilon$.

(5) $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon^2} \right] + 1$, $\forall n > N$, $|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0| =$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon.$$

(10) 令 $a = 1 + h (h > 0)$. $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1+h}{\epsilon h} \right] + 1$, $\forall n > N$,

$$\left| \left(\frac{1}{n} + a^{-n} \right) - 0 \right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{a^n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{nh} = \frac{1+h}{nh} < \epsilon.$$

2. 用定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} = \frac{3}{2};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3, \text{ 其中 } x_n = \begin{cases} 3, & n = 3k \\ \frac{3n+1}{n}, & n = 3k+1 \quad (k = 1, 2, \dots) \\ 2 + \frac{1+n}{3-\sqrt{n+n}}, & n = 3k+2 \end{cases}$$

【证明】(1) $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \max \left\{ 3, \left[\frac{4}{\epsilon} \right] \right\}$, $\forall n > N$,

$$\left| \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{2n+3}{2(2n^2-1)} < \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n} < \epsilon.$$

$$(4) \text{ 当 } n = 3k \text{ 时, } |x_n - 3| = 3 - 3 = 0; \text{ 当 } n = 3k+1 \text{ 时, } |x_n - 3| = \frac{3n+1}{n} - 3 = \frac{1}{n}; \text{ 当 } n = 3k+2 \text{ 时, } |x_n - 3| = \frac{\sqrt{n}-2}{3+n-\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} = \frac{\frac{3}{n^2} + n}{n^2 - n} < \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}n^2} = \frac{4}{\sqrt{n}} \quad (n > 4), \text{ 于是, } \forall \epsilon > 0, \text{ 取 } N =$$

$$\max \left\{ 4, \left[\frac{4}{\epsilon^2} \right] \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1 \right\}, \forall n > N, |x_n - 3| < \frac{4}{\sqrt{n}} < \epsilon.$$

3. 用定义证明:

(3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a > b$, 则存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > b$;

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

【证明】(3) 因 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 则对 $\epsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$,

$$|a_n - a| < \epsilon_0 = \frac{a-b}{2} \Rightarrow a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} > b.$$

(4) 若 $a = 0$, 因 $a_n \rightarrow a = 0 (n \rightarrow \infty)$, 且 $a_n > 0$, 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$

$N^+, \forall n > N, |a_n - 0| = a_n < \epsilon^2$, 从而 $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \epsilon$. 若 $a > 0$, 由 $a_n \rightarrow a > 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in N^+, \forall n > N, |a_n - a| < \sqrt{a}\epsilon$. 于是, 有 $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \epsilon$. 综上, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

4. 极限的定义改成下面的形式是否可以:

(1) $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n \geq N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$;

(2) $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| \leq \epsilon$;

(3) $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < M\epsilon (M \text{ 为常数})$.

【解】 (1) 可以. (2) 可以. (3) 可以.

5. 若 $|x_n y_n|$ 收敛, 能否断定 $|x_n|, |y_n|$ 也收敛?

【解】 不能. 如 $x_n = 0, y_n = (-1)^n$.

6. 设 $x_n \leq a \leq y_n (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

【证明】 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in N^+, \forall n > N, |(y_n - x_n) - 0| = |y_n - x_n| < \epsilon \Rightarrow y_n < x_n + \epsilon$. 又 $x_n \leq a \leq y_n$, 于是, 就有 $a \leq y_n < a + \epsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. 同理可证, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

7. 利用极限的四则运算求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - n + 1}{2n^3 - 3n^2 + 2};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{10}).$$

$$\text{【解】 (1) 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3} \right)} =$$

$$\frac{3}{2}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10} = 10.$$

8. 求下列极限: ((2)(5)(9) 小题见例 1-10, 例 1-11 和例 1-27)

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^a - n^a], 0 < a < 1.$$

【解】 由于 $0 < a < 1$, 则 $1 < \left(\frac{n+1}{n} \right)^a < 1 + \frac{1}{n}$, 即 $n^a < (n+1)^a <$

$n^a \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. 于是 $0 < (n+1)^a - n^a < n^{a-1} = \frac{1}{n^{1-a}} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^a - n^a] = 0.$$

10. 设 $x_n = (-1)^n$, 证明 $|x_n|$ 发散.

【证明】 用反证法. 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 而 $x_{n+1} = -x_n$, 就有 $a = -a \Rightarrow a = 0$. 但对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 取 $n = 2N$, 有 $|x_n - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$. 即 $|x_n|$ 不以 0 为极限, $|x_n|$ 发散.

11. 若 a_1, a_2, \dots, a_m 为 m 个正数, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

【证明】 $[\max(a_1, a_2, \dots, a_m)]^n \leq a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n \leq m[\max(a_1, a_2, \dots, a_m)]^n$, 故 $\max(a_1, a_2, \dots, a_m) \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{m} \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$. 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = 1$, 由夹迫准则知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

12. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[na_n]}{n} = a$; (2) 若 $a > 0, a_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

【证明】 (1) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{考虑 } \left| \frac{[na_n]}{n} - a \right| &= \left| \frac{[na_n] - na}{n} \right| = \left| \frac{[na_n] - na_n + na_n - na}{n} \right| \\ &\leq \frac{|[na_n] - na_n|}{n} + \frac{n|a_n - a|}{n} \\ &= \frac{|[na_n] - na_n|}{n} + |a_n - a| < \frac{1}{n} + |a_n - a|. \end{aligned}$$

于是, 取 $N = \max\left\{N_1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right\}$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $\left|\frac{[na_n]}{n} - a\right| < \frac{1}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon$.

(2) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a > 0$ 知, 对 $\varepsilon_0 = \frac{a}{2} > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon_0 = \frac{a}{2}$, 即 $0 < \frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$. 从而 $\sqrt[n]{\frac{a}{2}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}$, 而

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1$, 由夹迫准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

13. 利用单调有界原理, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求出它: ((1) 小题见例 1-12)

$$(4) x_0 = 1, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}, n = 1, 2, \dots$$

【证明】 (4) 显然 $0 < x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1 + x_n} \leq 2$, 即 $\{x_n\}$ 有界; $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{1 + x_n} - \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})}$, 而 $x_1 > x_0$, 由数学归纳法可知, x_n 单调增加. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{1 + x_n}\right)$, $a = 1 + \frac{a}{1 + a}$, 解得 $a = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ (舍去负值).

15. 证明: $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

【证明】 由已知, 对 $\epsilon_0 = \frac{l-1}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} - l \right| < \frac{l-1}{2}$ 成立, 即 $l - \frac{l-1}{2} < \frac{a_n}{a_{n+1}}$, 即 $a_{n+1} < \frac{2}{l+1} a_n$, $0 < a_{n+1} < \left(\frac{2}{l+1}\right)^n a_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

16. 见例 1-25.

18. 用定义证明下列数列为无穷大量: (1) $\{\sqrt{n}\}$; (4) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

【证明】 (1) $\forall G > 0$, 取 $N = [(G+1)^2]$, 则当 $n > N$ 时, 有 $|\sqrt{n}| = \sqrt{n} > G$.

(4) $\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$. $\forall G > 0$, 取 $N = e^{[G]+2}$, 当 $n > N$ 时, 有 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + [\ln(n+1) - \ln n] = \ln(n+1) > G$.

21. 利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 求下列极限: ((4) 小题见例 1-13)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

【解】 (1) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right]^{-n \cdot (-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

$$(3) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

§3 函数的极限

1. 用极限定义证明下列极限: ((1) 小题见例 1-14)

$$(7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2 - 9} = \infty; \quad (10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = 1.$$

【证明】 (7) 限制 $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$, 则 $\forall G > 0$,

$$\text{取 } \delta = \min\left\{1, \frac{2}{7G}\right\}, \text{ 当 } 0 < |x - 3| < \delta \text{ 时, 有 } \left|\frac{x}{x^2 - 9}\right| = \left|\frac{x}{(x+3)(x-3)}\right| > \frac{2}{7|x-3|} > G.$$

(10) $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \max\left\{2, \sqrt{\frac{4}{\epsilon} + 1}\right\}$, 当 $|x| > X$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} - 1\right| = \left|\frac{4}{x^2 - 1}\right| = \frac{4}{x^2 - 1} < \epsilon.$$

2. 用极限的四则运算法则求下列极限: ((7) 小题见例 1-15)

$$(5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3}.$$

$$\text{【解】 原式} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

5. 求下列函数在所示点的左右极限: ((2) 小题见例 1-16)

$$(4) f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], \text{ 在 } x = \frac{1}{n}, n \text{ 是正整数};$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \text{ 在 } x = 0. \\ 1 + x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{【解】 } (4) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow n^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow n^+} (t - [t]) = n - n = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow n^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow n^-} (t - [t]) = n - (n - 1) = 1.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 2^0 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2) = 1 + 0^2 = 1.$$

6. 求下列极限:

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x); \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 4};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x + 1}.$$

【解】 (3) 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$

(6) 因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$, 而 $|\sin x| \leq 1$, 故原式 = 0.

$$(8) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

7. 用变量替换求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right]; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0);$$

【解】 (1) 令 $\frac{1}{x} = t$, 则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $t \rightarrow +\infty$, 于是原式 = $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[t]}{t}$, 而 $t - 1 < [t] \leq t$, $1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} < \frac{[t]}{t} \leq \frac{t}{t} = 1$ ($t \rightarrow +\infty$), 故原式 = 1.

(2) 令 $x = e^{-t}$, 则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $t \rightarrow +\infty$, 于是原式 = $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{e^t} = 0.$

8. 提示, 利用例 1-17 的结论.

9. 设 $f(x)$ 在集合 X 上定义, 则 $f(x)$ 在 X 上无界的充要条件是: 存在 $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = +\infty$.

【证明】 必要性. 设 $f(x)$ 在 X 上无界, 即 $\forall G > 0$, $\exists x \in X$, 使得 $|f(x)| > G$. 特别取 $G = 1$, $\exists x_1 \in X$, 使 $|f(x_1)| > 1$; 取 $G = 2$, $\exists x_2 \in X$, 使 $|f(x_2)| > 2$; \dots ; 取 $G = n$, $\exists x_n \in X$, 使 $|f(x_n)| > n$; \dots , 由此得到一数列 $\{x_n\} \subset X$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = +\infty$.

充分性. 设 $\{x_n\} \subset X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = +\infty$, 从而 $\forall G > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, $|f(x_n)| > G$, 特别, 取 $x_{N+1} \in X$, 满足 $|f(x_{N+1})| > G$, 从而 $f(x)$ 在 X 上无界.

10. 利用重要极限求极限: ((6) 小题见例 1-18, (14) 小题见例 1-19, (20) 小题见例 1-20)

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x};$$

$$(16) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) \quad (n \text{ 为正整数});$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x};$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x};$$

$$(24) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n.$$

【解】 (3) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5 \cos 3x} = \frac{3}{5}.$

$$\begin{aligned} (4) \text{ 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

$$(9) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} (16) \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0. \end{aligned}$$

$$(19) \text{ 令 } \tan x = t, \text{ 则当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } t \rightarrow 0, \text{ 于是原式} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

$$(22) \text{ 令 } x = t + \frac{\pi}{2}, \text{ 则当 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ 时, } t \rightarrow 0, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t)^{-\cot t} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \cos t - 1)^{\frac{1}{\cos t - 1} \cdot \frac{\cos t (1 - \cos t)}{\sin t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{2 \cos t \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{t}{\sin t} \cdot \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \cdot 2 t \cos t \right\} = e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$(24) \text{ 当 } x = 0 \text{ 时, 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{(n-1) \cdot \frac{n}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{n-1}} = e;$$

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{x}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{\frac{n}{x} \cdot x}}{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{e^x}{e^{-1}} = e^{x+1}.$$

综上, 原式 = e^{x+1} .

11. 见例 1-21.

12. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x)$ 不存在, 其中 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数,} \\ 0, & x \text{ 是无理数.} \end{cases}$

【证明】 根据实数的稠密性, 在 $(x_0, x_0 + 1)$ 内取一有理数 x_1 , 取一无理数 y_1 ; 在 $(x_0, x_0 + \frac{1}{2})$ 内取一有理数 x_2 , 取一无理数 y_2 ; \dots , 在 $(x_0, x_0 + \frac{1}{n})$ 内取一有理数 x_n , 取一无理数 y_n , \dots , 便得到两数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) = 1 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} D(y_n) = 0$, 根据海涅定理的逆否命题, 知 $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x)$ 不存在.

13. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n}$.

【解】 $\sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \dots = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin x}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] =$$

$\frac{\sin x}{x} (x \neq 0)$, 当 $x = 0$ 时, 原式 = 1.

16. 见例 1-22.

17. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ 的充要条件是: 对任何数列 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ 且 $x_n > x_0$, 有 $f(x_n) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$.

【证明】 必要性. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$. 则 $\forall G > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $f(x) > G$. 由于 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ 且 $x_n > x_0$, 则对上述的 δ , $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时有 $0 < x_n - x_0 < \delta$, 从而当 $n > N$ 时, 有 $f(x_n) > G$, 即 $f(x_n) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$.

充分性. 用反证法. 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ 不真, 则 $\exists G_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x'$, 满足 $0 < x' - x_0 < \delta, f(x') \leq G_0$. 特别取 $\delta_1 = 1, \exists x_1$, 满足 $0 < x_1 - x_0 < 1, f(x_1) \leq G_0$; 取 $\delta_2 = \frac{1}{2}, \exists x_2$, 满足 $0 < x_2 - x_0 < \delta_2, f(x_2) \leq G_0$; \dots ; 取 $\delta_n = \frac{1}{n}, \exists x_n$, 满足 $0 < x_n - x_0 < \delta_n, f(x_n) \leq G_0$; \dots ,

这样便得一个数列 $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, $x_n > x_0$, 但 $f(x_n) \leq G_0$. 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 矛盾.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上满足方程 $f(2x) = f(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明: $f(x) \equiv A, x \in (0, +\infty)$.

【证明】 用反证法. 假设 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x_0) \neq A$. 不妨设 $f(x_0) > A$, 又 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(2x) = f(x)$. 于是 $f(x_0) = f(2x_0) = \dots = f(2^{n-1}x_0) = \dots$. 取 $x_1 = x_0, x_2 = 2x_0, \dots, x_n = 2^{n-1}x_0, \dots$, 便得一数列 $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \neq A$. 另一方面, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则由本书 16 的结果可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. 矛盾.

§4 函数的连续性

1. 用定义证明下列函数在定义域内连续: ((4) 小题见例 1-23)

(1) $y = \sqrt{x}$.

【证明】 (1) $\forall \epsilon > 0$, 当 $x_0 = 0$ 时, 取 $\delta = \epsilon^2$, 当 $0 < x < \delta$ 时, 有 $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \epsilon$; 当 $x_0 > 0$ 时, 取 $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon$. 于是, 该函数在 $[0, +\infty)$ 内连续.

2. 指出下列函数的间断点并说明其类型:

(1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; (3) $f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$; (4) $f(x) = [x] + [-x]$;

(7) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$; (11) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

【解】 (1) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \infty$. 故 $x = 0$ 是第二类不连续点.

(3) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2}{x} \right)$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{2}{x}$ 不存在. 故 $x = 0$ 是第二类不连续点.

(4) 设 $k \in \mathbb{N}$, 则 $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} ([x] + [-x]) = k + (-k-1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} ([-x] + [x]) = (k-1) + (-k) = -1$, 但 $f(k) = 0$. 故

$x = k$ 为可去间断点.

(7) 由于 $\lim_{x \rightarrow (2k\pi + \frac{\pi}{2})^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow (2k\pi + \frac{\pi}{2})^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow [(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]^+} f(x) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow [(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]^-} f(x) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$. 故 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为第一类间断点.

(11) ① 当 $x_0 \neq k$ (k 为整数), 在 x_0 的右侧取有理数列 $\{x_n\}$ 及无理数列 $\{y_n\}$, 使当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow x_0$. 于是就有 $f(x_n) = \sin \pi x_n \rightarrow \sin \pi x_0 \neq 0$, $f(y_n) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 因此 $x_0 \neq k$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

② 当 $x_0 = k$, 考察 $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| \leq |\sin \pi x| = |\sin \pi x - \sin \pi x_0| \leq \pi |x - x_0|$, $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{\pi}$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. 所以 $x_0 = k$ 是 $f(x)$ 的连续点.

4. 设 $f(x)$ 是连续函数, 证明对任何 $c > 0$, 函数

$$g(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c \\ f(x), & |f(x)| \leq c \\ c, & f(x) > c \end{cases}$$

是连续的.

【证明】 由 $g(x) = \frac{1}{2}[|c + f(x)| - |c - f(x)|]$ 可知, $g(x)$ 是连续的.

7. 证明若连续函数在有理点的函数值为 0, 则此函数恒为 0.

【证明】 设 $f(x)$ 的定义域为 I , 则 $\forall x_0 \in I$, $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则有 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$, $x \in I$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. 由有理数的稠密性, 在 $O(x_0, \delta)$ 中可选出一有理数列 $\{x_n\}$, 使得 $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$). 由于 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则有 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. 又 $\forall n$, 有 $f(x_n) = 0$, 从而 $f(x_0) = 0$. 由 x_0 的任意性, 故 $f(x) \equiv 0$ ($\forall x \in I$).

8. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 恒正, 按 ϵ - δ 定义证明 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 连续.

【证明】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $\forall x_0 \in (a, b)$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f^2(x_0)}{2}$. 又 $f(x_0) > 0$, 由极限的保号性, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 有

$|f(x)| > \left| \frac{f(x_0)}{2} \right| = \frac{f(x_0)}{2}$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 就

有 $\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)} \right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|f(x)| |f(x_0)|} < \frac{\frac{f^2(x_0)}{2}}{\frac{f^2(x_0)}{2}} \epsilon = \epsilon$. 即 $\frac{1}{f(x)}$ 在 (a, b)

连续. 同理可证 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $x = a$ 与 $x = b$ 时也连续, 只需分别将 $|x - x_0| < \delta$ 换成 $x - a < \delta$ 和 $b - x < \delta$ 即可. 综上所述, $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上连续.

10. 证明: 设 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的单调函数, 若 $x_0 \in (a, b)$ 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 必是 $f(x)$ 的第一类间断点.

【证明】不妨设 $f(x)$ 在 (a, b) 单调增加, 集合 $E = \{f(x) \mid x \in (a, x_0)\}$ 非空有上界, 必存在上确界, 记为 $\beta = \sup E$, 对一切 $x \in (a, x_0)$ 成立 $f(x) \leq \beta$; 而 $\forall \epsilon > 0$, 必存在 $x_1 \in (a, x_0)$, 使得 $f(x_1) > \beta - \epsilon$, 取 $\delta = x_0 - x_1 > 0$, 则当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 有 $x_1 < x < x_0$, 成立 $f(x_1) \leq f(x)$, 于是 $-\epsilon < f(x_1) - \beta \leq f(x) - \beta < 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \beta$.

同理可证, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \alpha = \inf\{f(x) \mid x \in (x_0, b)\}$.

由上证明可知, (a, b) 上单调函数在 x_0 点的左、右极限均存在. 于是, x_0 必是 $f(x)$ 的第一类间断点.

11. 见例 2-20. 13. 见例 2-21. 14. 见例 2-22.

15. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $0 \leq f(x) \leq x (x \geq 0)$, 若 $a_1 \geq 0$, $a_{n+1} = f(a_n) (n = 1, 2, \dots)$. 求证 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在; (2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, $f(l) = l$; (3) 如果将条件改为 $0 \leq f(x) \leq x (x > 0)$, 则 $l = 0$.

【证明】(1) 因 $a_1 \geq 0$ 且 $0 \leq f(x) \leq x$, 所以 $a_1 \geq f(a_1) = a_2 \geq 0$, 于是就有 $a_2 \geq f(a_2) = a_3 \geq 0, \dots, a_{n-1} \geq f(a_{n-1}) = a_n \geq 0, \dots$, 故 $\{a_n\}$ 单调下降且有下界, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在;

(2) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = l$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$. 所以 $f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = l$, 即 $f(l) = l$;

(3) 用反证法. 若 $l \neq 0$, 则 $l > 0$. 由(2)知 $f(l) = l$, 这与已知 $f(l) < l$ 相矛盾, 故 $l = 0$.

16. 求极限: (3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{【证明】 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{-\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x^2}{4}} \right\} = e^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

第四章 微商与微分

§ 1 微商概念及其计算

1. 求抛物线 $y = x^2$ 在 $A(1, 1)$ 点和在 $B(-2, 4)$ 点的切线方程和法线方程.

【解】 在 $A(1, 1)$ 点的切线方程为 $y = 2x - 1$, 法线方程为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; 在 $B(-2, 4)$ 点的切线方程为: $y = -4x - 4$, 法线方程为: $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

3. 试确定曲线 $y = \ln x$ 在哪些点的切线平行于下列直线: (1) $y = x - 1$; (2) $y = 2x - 3$.

【解】 (1) $(1, 0)$ 点. (2) $\left(\frac{1}{2}, -\ln 2\right)$ 点.

4. 见例 3-16.

5. 求下列曲线在指定点 P 的切线方程和法线方程:

(1) $y = \frac{x^2}{4}$, $P(2, 1)$; (2) $y = \cos x$, $P(0, 1)$.

【解】 (1) 切线方程为 $y = x - 1$, 法线方程为 $y = -x + 3$.

(2) 切线方程为 $y = 1$, 法线方程为 $x = 0$.

6. 求下列函数的导函数:

(1) $f(x) = |x|^3$; (2) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$.

【解】 (1) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ -3x^2, & x \leq 0 \end{cases}$.

(2) $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $f'(0)$ 不存在.

7. 见例 3-17. 8. 见例 3-18.

9. 证明: 若 $f'(x_0)$ 存在, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x_0).$$

【证明】 因为 $f'(x_0)$ 存在, 所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, 故
 左边 = $\frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} \right] = f'(x_0)$.

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, 且对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$. 若 $f'(0) = 1$, 证明对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f'(x) = f(x)$.

【证明】 令 $x_1 = x_2 = 0$, 则 $f(0+0) = f(0)f(0)$, 即 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$.

若 $f(0) = 0$, 则对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x) = f(x)f(0) = 0$, 显然 $f'(x) = f(x) = 0$.

若 $f(0) = 1$, 则由于 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$
 $= f(x)f'(0) = f(x)$.

11. 设 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 证明: $f'(0) = 0$.

【证明】 $f'(0)$ 存在, $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0)$, 又 $f'_+(0) =$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-x) - f(0)}{x} = -f'_-(0)$, 所以 $f'(0) =$
 $-f'(0) \Rightarrow f'(0) = 0$.

12. 设 $f(x)$ 是奇函数, 且 $f'(x_0) = 3$ 存在, 求 $f'(-x_0)$.

【证明】 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 - \Delta x) - f(-x_0)}{-\Delta x} = f'(-x_0) = 3$.

13. 用定义证明: 可导的偶函数的导数是奇函数, 而可导的奇函数的导数是偶函数.

【证明】 设 $f(x)$ 是可导的偶函数, 则

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x - \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} \\ = -f'(-x),$$

即 $f'(x)$ 是奇函数.

设 $g(x)$ 是可导的奇函数, 则

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-g(-x - \Delta x) + g(-x)}{\Delta x} \\ = g'(-x),$$

即 $g'(x)$ 是偶函数.

14. 求下列函数的导数: ((3)(9) 小题见例 3-1)

$$(1) y = x^2 \sin x;$$

$$(2) y = x \cos x + 3x^2;$$

$$(4) y = e^x \sin x - 7 \cos x + 5x^2;$$

$$(5) y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 2x^3;$$

$$(6) y = 3x + 5\sqrt{x} + \frac{7}{x^3};$$

$$(7) y = \frac{1+x^2}{1-x^2};$$

$$(8) y = \frac{1}{1+x+x^2};$$

$$(10) y = \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{1-\sqrt{x}};$$

$$(11) y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};$$

$$(12) y = \frac{1}{3\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x};$$

$$(13) y = x^3 \ln x - \frac{1}{n} x^n;$$

$$(14) y = \frac{\cos x}{x^4} \ln \frac{1}{x};$$

$$(15) y = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x;$$

$$(16) y = \frac{x \cos x - \ln x}{x+1};$$

$$(17) y = \frac{1}{x + \cos x};$$

$$(18) y = \frac{x \sin x + \cos x}{x \sin x - \cos x};$$

$$(19) y = \frac{x e^x - 1}{\sin x};$$

$$(20) y = x \sin x \ln x.$$

【解】

$$(1) y' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

$$(2) y' = \cos x - x \sin x + 6x.$$

$$(4) y' = e^x \sin x + e^x \cos x + 7 \sin x + 10x. \quad (5) y' = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} - 6x.$$

$$(6) y' = 3 + \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{21}{x^4}.$$

$$(7) y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

$$(8) y' = \frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}.$$

$$(10) y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}.$$

$$(11) y' = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}.$$

$$(12) y' = \frac{2x^{\frac{5}{6}} - 1}{6x\sqrt{x}}.$$

$$(13) y' = (3\ln x + 1)x^2 - x^{n-1}.$$

$$(14) y' = \frac{x \ln x \sin x - (1 - 4 \ln x) \cos x}{x^5}.$$

$$(15) y' = 1 + \ln x + \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$(16) y' = \frac{-1 - x + x \cos x + x \ln x - x^2(1+x) \sin x}{x(x+1)^2}.$$

$$(17) y' = \frac{-1 + \sin x}{(x + \cos x)^2}.$$

$$(18) y' = \frac{-2x - \sin 2x}{(x \sin x - \cos x)^2}.$$

$$(19) y' = [e^x(1+x) + (1 - xe^x) \cot x] \csc x.$$

$$(20) y' = \sin x \ln x + x \cos x \ln x + \sin x.$$

15. 求下列复合函数的导数: ((8)(15) 小题见例 3-2)

$$(1) y = (x^3 - 4)^3;$$

$$(2) y = x(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$(3) y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$(4) y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}};$$

$$(5) y = \ln \ln x;$$

$$(6) y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|;$$

$$(7) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2});$$

$$(9) y = \cos(\cos \sqrt{x});$$

$$(10) y = \cos^3 x - \cos 3x;$$

$$(11) y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2};$$

$$(12) y = \arcsin(\sin x \cdot \cos x);$$

$$(13) y = \arctan \frac{2x}{1-x^2};$$

$$(14) y = e^{-x^2+2x};$$

$$(16) y = e^{2x} \sin 3x + \frac{x^2}{3};$$

$$(17) y = \frac{e^{-kx} \sin ax}{1+x};$$

$$(18) y = x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$(19) y = \sin^n x \cos nx;$$

$$(20) y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}.$$

【解】

$$(1) y' = 9x^2(x^3 - 4)^2.$$

$$(2) y' = (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + 2x^2 \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2(a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$(3) y' = \frac{a^2}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$(4) y' = \frac{2x^2}{(x^3 - 1)^2} \left(\frac{1 - x^3}{1 + x^3} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$(5) y' = \frac{1}{x \ln x}.$$

$$(6) y' = \frac{a}{a^2 - x^2}.$$

$$(7) y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$(9) y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\cos\sqrt{x}) \sin\sqrt{x}.$$

$$(10) y' = -3\cos^2 x \sin x + 3\sin 3x.$$

$$(11) y' = \frac{-6x}{\sqrt{2\pi}} e^{-3x^2}.$$

$$(12) y' = \frac{2\cos 2x}{\sqrt{4 - \sin^2 2x}}.$$

$$(13) y' = \frac{2}{1 + x^2}.$$

$$(14) y' = 2e^{-x^2+2x}(1-x).$$

$$(16) y' = 2e^{2x} \sin 3x + 3e^{2x} \cos 3x + \frac{2x}{3}.$$

$$(17) y' = \frac{e^{-kx}[\omega(1+x)\cos\omega x - (1+k+kx)\sin\omega x]}{(1+x)^2}.$$

$$(18) y' = \frac{a^4 + 2x^4 + a^2(1-3x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$(19) y' = n\sin^{n-1} x \cos x - n\sin^n x \sin x.$$

$$(20) y' = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

16. 用对数求导法求下列函数的导数: ((1)(6) 小题见例 3-23)

$$(2) y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt{\frac{1+x}{1+x+x^2}};$$

$$(3) y = (x + \sqrt{1+x^2})^n;$$

$$(4) y = x^x, x > 0;$$

$$(5) y = x^{\ln x} (x > 0);$$

$$(7) y = x^{\tan x}, x > 0;$$

$$(8) y = a^{\sin x}, a > 0.$$

【解】 (3) $y' = \frac{x(4+6x+2x^2+x^3-x^4)}{2(x^3-1)^2 \sqrt{\frac{1+x}{1+x+x^2}}}.$

$$(3) y' = \frac{n(x + \sqrt{1+x^2})^n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$(4) y' = x^x(1 + \ln x). \quad (5) y' = x^{\ln x} \cdot \frac{2\ln x}{x} = \frac{2\ln x}{x} x^{\ln x}.$$

$$(7) y' = x^{\tan x} \left(\sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x} \right).$$

$$(8) y' = a^{\sin x} \cos x \ln a.$$

17. 设 $f(x)$ 是对 x 可求导的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$: ((2) 小题见例 3-3)

$$(1) y = f(x^2); \quad (3) y = f(f(f(x))).$$

【解】 (1) $\frac{dy}{dx} = 2xf'(x^2).$

$$(3) \frac{dy}{dx} = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x).$$

18. 设 φ 和 $\psi(x)$ 是对 x 可求导的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)};$$

$$(2) y = \arctan \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} (\psi(x) \neq 0);$$

$$(3) y = \sqrt[n]{\varphi(x)} (\varphi(x) \neq 0, \psi(x) > 0);$$

$$(4) y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) (\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0, \varphi(x) \neq 1).$$

【解】 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}.$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x) + \varphi^2(x)}.$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \sqrt[n]{\varphi(x)} \left[\frac{\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)\psi(x)} \right].$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)\psi'(x)\ln\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)\psi(x)(\ln\varphi(x))^2}.$$

19. 求下列函数的导数: ((6)(9) 小题见例 3.4)

$$(1) y = e^{ax}(\cos bx + \sin bx);$$

$$(2) y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2);$$

$$(3) y = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} + \arctan \frac{2x}{1-x^2};$$

$$(4) y = \arctan(\tan^2 x);$$

$$(5) y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b (a, b > 0);$$

$$(7) y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| (a > 0);$$

$$(8) y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

$$(10) y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

【解】 (1) $y' = ae^{ax}(\cos bx + \sin bx) + e^{ax}(-b \sin bx + b \cos bx).$

$$(2) y' = \arctan x.$$

$$(3) y' = \frac{5 - 5\sqrt{1-x^2} - x^2(\sqrt{1-x^2} + 3)}{2\sqrt{1-x^2}(1+x^2)(\sqrt{1-x^2}-1)}.$$

$$(4) y' = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$$

$$(5) y' = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(b - a + \ln \frac{a}{b}\right)}{x}.$$

$$(7) y' = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

$$(10) y = \frac{1}{1+x^3}.$$

§2 微分概念及其计算

1. 求下列函数在指定点的微分: ((3) 小题见例 3-5)

(1) $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 求 $dy(0)$, $dy(a)$;

(2) $y = \sec x + \tan x$, 求 $dy(0)$, $dy\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $dy(\pi)$;

(4) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, 求 $dy(0.1)$, $dy(0.01)$.

【解】 (1) $dy(0) = a_1 dx$, $dy(a) = [na_n a^{n-1} + (n-1)a_{n-1} a^{n-2} + \cdots + a_1] dx$.

(2) $dy(0) = dx$, $dy\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) dx$, $dy(\pi) = dx$.

(4) $dy(0.1) = -2100 dx$, $dy(0.01) = -2010000 dx$.

2. 求下列函数的微分: ((3)(5) 小题见例 3-6)

(1) $y = \frac{x}{1-x^2}$ (2) $y = x \ln x - x$;

(4) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$; (6) $y = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$.

【解】 (1) $dy = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} dx$. (2) $dy = \ln x dx$.

(4) $dy = \frac{-x}{\sqrt{x^2-x^4}} dx$. (6) $dy = \sec x dx$.

3. 设 u , v 是 x 的可微函数, 求 dy : ((1)(3) 小题见例 3-7)

$$(2) y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}; \quad (4) y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

【解】 (2) $dy = \frac{uu' + vv'}{u^2 + v^2} dx.$

(4) $dy = -(u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}}(uu' + vv')dx.$

4. 求下列函数的微分 dy : ((1)(3) 小题见例 3-8)

(2) $y = \ln(3t + 1), t = \sin^2 x;$

(4) $y = \arctan u, u = (\ln t)^2, t = 1 + x^2 - \cot x.$

【解】 (2) $dy = \frac{3\sin 2x}{1 + 3\sin^2 x} dx.$

(4) $dy = \frac{2(2x + \csc^2 x)\ln(1 + x^2 - \cot x)}{(1 + x^2 - \cot x)[1 + [\ln(1 + x^2 - \cot x)]^4]} dx.$

§ 3 隐函数与参数方程微分法

1. 求下列隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$: ((4)(7)(10) 小题见例 3-19)

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b 为常数);

(2) $y^2 = 2px$ (p 为常数);

(3) $x^2 + xy + y^2 = a^2;$

(5) $y = x + \frac{1}{2}\sin y;$

(6) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (a 为常数);

(7) $y = \cos(x + y);$

(8) $y = x + \arctan y;$

(9) $y = 1 - \ln(x + y) + e^y.$

【解】 (1) $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$

(2) $y' = \frac{p}{y}.$

(3) $y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$

(5) $y' = -\frac{2}{-2 + \cos y}.$

(6) $y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$

(7) $y' = \frac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}.$

(8) $y' = 1 + \frac{1}{y^2}.$

(9) $y' = \frac{1}{-1 + (e^y - 1)(x + y)}.$

2. 求下列参数方程的导数: ((3)(4) 小题见例 3-20)

(1) $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t} \\ y = \frac{1-t}{1+t} \end{cases};$

(2) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}.$

【解】 (1) $\frac{dy}{dx} = -2$.

(2) $\frac{dy}{dx} = -1$.

3. 求函数 $y = y(x)$ 在指定点的导数:

(1) $y = \cos x + \frac{1}{2} \sin y$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$;

(2) $ye^x + \ln y = 1$, $(0, 1)$;

(3) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}, \pi$ 处;

(4) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ 在 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ 处.

【解】 (1) $y' \Big|_{\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)} = -2$.

(2) $y' \Big|_{(0, 1)} = \frac{1}{2}$.

(3) $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1, \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\pi} = 0$.

(4) $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\sqrt{3}}{3}} = 0$.

§ 4 高阶微商与高阶微分

1. 求下列函数在指定点的高阶导数:

(1) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 9$, 求 $f'(1), f''(1), f^{(4)}(1)$;

(2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f'(0), f''(1), f'(-1)$.

【解】 (1) $f'(1) = 26, f''(1) = 18, f^{(4)}(1) = 0$.

(2) $f'(0) = 0, f''(1) = -\frac{3}{4\sqrt{2}}, f'(-1) = \frac{3}{4\sqrt{2}}$.

2. 求下列函数的高阶导数: ((1)(3) 小题见例 3-9)

(2) $y = e^{-x^2}$, 求 y''' ;

(4) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 求 $y''(0)$;

(5) $y = x^5 \cos x$, 求 $y^{(50)}$;

(6) $y = x^3 \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 求 $y^{(30)}$.

【解】 (2) $y''' = -4xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$. (4) $y''(0) = 0$.

(5) $y^{(50)} = -x(27636000 - 24500x^2 + x^4)\cos x - 50(5085024 - 23520x^2 + 5x^4)\sin x$.

(6) $y^{(30)} = \frac{1}{2}e^{-x}(24360 - 2610x + 90x^2 - x^3) + \frac{1}{2}e^x(24360 + 2610x + 90x^2 + x^3)$.

3. 求下列函数的 n 阶导数: (1) $y = a^x$; (2) $y = \ln x$.

【解】 (1) $y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$. (2) $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

4. 求下列函数的 n 阶导数: ((1)(2)(4) 小题见例 3-10)

(3) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$; (5) $y = \ln \frac{x+2}{1-x}$; (6) $y = 2^x \ln x$.

【解】 (3) $y = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2} \right)$.

$$y^{(n)} = \frac{1}{6} \left[(-1)^n \frac{n!}{(x-4)^{n+1}} - (-1)^n \frac{n!}{(x+2)^{n+1}} \right].$$

(5) $y = \ln |x+2| - \ln |1-x|$,

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \left[\frac{1}{(x+2)^n} - \frac{1}{(x-1)^n} \right].$$

(6) $y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (\ln x)^{(k)} (2^x)^{(n-k)} = 2^x \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\ln 2)^{n-k} C_n^k k!}{x^k}$.

5. 见例 3-11. 6. 见例 3-14.

7. 求下列函数的二阶微分: ((3) 小题见例 3-12)

(1) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; (2) $y = x \arctan x$.

【解】 (1) $dy = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} dx$, $d^2y = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} dx^2 - \frac{1}{2x\sqrt{x}} d^2x$.

(2) $dy = \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right) dx$,

$$d^2y = \frac{2}{(1+x^2)^2} dx^2 + \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right) d^2x.$$

8. 求下列函数的三阶微分: ((1) 小题见例 3-13)

(2) 设 $u(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $v(x) = \cos 2x$, 求 $d^3(uv)$, $d^3\left(\frac{u}{v}\right)$.

【解】 (2) $d^3(uv) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{8} [(47\cos 2x - 52\sin 2x) dx^3 - 4(\cos 2x - 4\sin 2x) d^3x + 6(15\cos 2x + 8\sin 2x) dx d^2x];$

$$d^3\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{8} \sec 2x \left\{ 4(1 + 4\tan 2x) dx^3 + \frac{1}{4} \sec^2 2x [12(49 - 15\cos 4x + 8\sin 4x) d^2x + (243 - 47\cos 6x \sec 2x - 52\sec 2x \sin 6x + 1484 \tan 2x) dx^2] dx \right\}.$$

9. 求下列参数方程的二阶导数: ((1)(6) 小题见例 3-22)

$$(2) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases};$$

$$(3) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases};$$

$$(4) \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases};$$

$$(5) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases};$$

【解】 (2) $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{a} \csc^3 t$.

(3) $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{4a} \csc^4 \frac{t}{2}$.

(4) $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2}{e^t (\cos t + \sin t)^3}$.

(5) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}$.

10. 求下列隐函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$: ((1)) 小题见例 3-21)

(2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

(3) $y^2 + 2\ln y - x^4 = 0$.

【解】 (2) $y'' = \frac{2xy(a^3 + x^3 - 3axy + y^3)}{(ax - y^2)^3}$.

(3) $y'' = \frac{2x^2 y [3 + 2x^4 - 2(x^4 - 3)y^2 + 3y^4]}{(1 + y^2)^3}$.

11. 见例 3-24. 14. 见例 3-25.

第五章 微分中值定理及其应用

§1 微分中值定理

- | | | |
|--------------|--------------|-----------------|
| 1. 见例 3-28. | 2. 提示: 罗尔定理. | 3. 见例 3-24. |
| 4. 见例 3-26. | 5. 见例 3-27. | 6. 见例 3-31. |
| 7. 见例 3-29. | 8. 见例 3-30. | 9. 见例 3-43. |
| 10. 见例 3-33. | 11. 见例 3-44. | 13. 见例 3-38. |
| 14. 见例 3-39. | 15. 见例 3-42. | 16. 提示: 推论 5-2. |

§2 洛必达法则

1. 求下列待定型的极限: (其他见例 3-45)

(20) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\begin{aligned}
\text{【解】 (20) 原式} &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\tan x}{x} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |\tan x| - \ln |x|}{x^2} \right\} \\
&= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{x}}{2x} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sec^2 x - \tan x}{2x^2 \tan x} \right\} \\
&= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sec^2 x - \tan x}{2x^3} \right\} \\
&= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x + 2x \sec^2 x \tan x - \sec^2 x}{6x^2} \right\} \\
&= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right\} = e^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

2. 见例 3-52. 3. 见例 3-26 注.

4. 分子分母求导后没有极限, 但是不能断定原极限不存在.

§ 3 函数的升降、凸性和函数作图

1. 见例 3-35.

2. 确定下列函数的单调区间:

$$(1) y = x^3 - 6x; \quad (2) y = \sqrt{2x - x^2};$$

$$(3) y = 2x^2 - \ln x; \quad (4) y = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

【解】 (1) 在 $(-\infty, -\sqrt{2}]$ 和 $[\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调上升, 在 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 上单调下降.

(2) 在 $(0, 1]$ 上单调上升, 在 $[1, 2)$ 上单调下降.

(3) 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单调下降, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调上升.

(4) 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调上升.

3. 参考课本 143 页例 4. 7. 见例 3-37. 14. 见例 3-36.

§ 4 函数的最大值最小值问题

2. 见例 3-40. 8. 见例 3-41.

第六章 不定积分

§ 1 不定积分的概念

1. 求下列不定积分: ((4)(10)(13) 小题见例 4-1)

$$(1) \int \left(x^5 + x^3 - \frac{\sqrt{x}}{4} \right) dx;$$

$$(2) \int (5-x)^3 dx;$$

$$(3) \int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx;$$

$$(5) \int \frac{3x^2}{1+x^2} dx;$$

$$(6) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(7) \int (2\sin x - 4\cos x) dx;$$

$$(8) \int (3 - \sec^2 x) dx;$$

$$(9) \int (\tan^2 x + 3) dx;$$

$$(11) \int \frac{\tan x}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} dx;$$

$$(12) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$$

$$(14) \int (5^x + 1)^2 dx;$$

$$(15) \int \left[2^x + \left(\frac{1}{3} \right)^x - \frac{e^x}{5} \right] dx;$$

$$(16) \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$(17) \int \left(\cos x - \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} \right) dx;$$

$$(18) \int \sqrt{x}\sqrt{x} dx;$$

$$(19) \int 2^{2x} 3^x dx;$$

$$(20) \int \left(\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} + \sin x \right) dx.$$

【解】 (1) $\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$

(2) $-\frac{1}{4}(5-x)^4 + C.$

(3) $\frac{1}{12}\sqrt{x}(24 + 18x^{\frac{1}{6}} + 9x^{\frac{5}{6}} + 8x) + C.$ (5) $3(x - \arctan x) + C.$

(6) $\frac{2}{3}\sqrt{x}(3+x) + C.$

(7) $-2\cos x - 4\sin x + C.$

(8) $3x - \tan x + C.$

(9) $2x + \tan x + C.$

(11) $\sec x + C.$

(12) $\sin x - \cos x + C.$

$$(14) \frac{4 \cdot 5^x + 25^x + x \ln 25}{\ln 25} + C.$$

$$(15) -\frac{e^x}{5} + \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$$

$$(16) e^x - 2\sqrt{x} + C.$$

$$(17) \sin x - 2 \arctan x - \frac{1}{4} \arcsin x + C.$$

$$(18) \frac{4}{7} x \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} + C.$$

$$(19) \frac{12^x}{\ln 12} + C.$$

$$(20) \frac{3}{2} \arcsin x - \cos x + C.$$

2. 见例 4-2.

3. 已知 $f(x)$ 满足给定的关系式, 试求 $f(x)$: ((1)(3) 小题见例 4-3)

$$(2) \frac{f'(x)}{x} = 1 \quad (x > 0);$$

$$(4) \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \quad (f(x) > 0).$$

【解】 (2) $f(x) = \frac{x}{2} + C.$

(4) $f(x) = Ce^x.$

§2 换元积分与分部积分法

1. 用凑微分法求下列不定积分: ((2)(9)(14)(16)(18) 小题见例 4-4)

$$(1) \int \frac{dx}{5x-6};$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}};$$

$$(4) \int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} \right) dx;$$

$$(5) \int \frac{dx}{2+3x^2};$$

$$(6) \int e^{-\frac{x}{2}} dx;$$

$$(7) \int e^{-\frac{x}{2}} dx;$$

$$(8) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx;$$

$$(10) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$(11) \int \tan x dx;$$

$$(12) \int \tan^3 x \sec^2 x dx;$$

$$(13) \int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx;$$

$$(15) \int \cos^5 x dx;$$

$$(17) \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx;$$

$$(19) \int \frac{x}{4+x^2} dx;$$

$$(20) \int \frac{x}{4+x^4} dx;$$

$$(21) \int \frac{5-4x}{3x-2} dx;$$

$$(22) \int \sin 2x \cos 3x dx;$$

$$(23) \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx;$$

$$(24) \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2};$$

$$(25) \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(26) \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx;$$

$$(27) \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1+\sqrt{x}}};$$

$$(28) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)};$$

$$(29) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;$$

$$(30) \int \sqrt{1+\sin x} dx.$$

【解】 (1) $\frac{1}{5} \ln(5x-6) + C.$ (3) $\frac{1}{3} [(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}] + C.$

$$(4) \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\arcsin \sqrt{3}x}{\sqrt{3}} + C.$$

$$(5) \frac{1}{2} \arctan \sqrt{\frac{3}{2}} x + C.$$

$$(6) -2e^{-\frac{x}{2}} + C.$$

$$(7) -\frac{e^{-x^2}}{2} + C.$$

$$(8) \ln(e^x + 1) + C.$$

$$(10) \arctan e^x + C.$$

$$(11) -\ln \cos x + C.$$

$$(12) \frac{\tan^6 x}{6} + C.$$

$$(13) (-2 + \sin x) \sec x + C.$$

$$(15) \frac{1}{240} (150 \sin x + 25 \sin 3x + 3 \sin 5x).$$

$$(17) \ln \cos x + \ln \sin x + C.$$

$$(19) \frac{1}{2} \arctan(4+x^2) + C.$$

$$(20) -\frac{1}{4} \arctan \frac{2}{x^2} + C.$$

$$(21) -\frac{4x}{3} + \frac{7}{9} \ln(3x-2) + C.$$

$$(22) \frac{1}{10} (5 \cos x - \cos 5x) + C.$$

$$(23) \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

$$(24) \cos \frac{1}{x} + C.$$

$$(25) \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$$

$$(26) \frac{\arctan^2 x}{2} + C.$$

$$(27) 4 \sqrt{1+\sqrt{x}} + C.$$

$$(28) 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

$$(29) \arcsin e^x + C.$$

$$(30) \frac{2 \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) \sqrt{1+\sin x}}{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} + C.$$

2. 用换元积分法求下列不定积分: ((3)(5)(8) 小题见例 4-5)

$$(1) \int \sqrt{x^2 - a^2} dx;$$

$$(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(4) \int \sqrt{2+x-x^2} dx;$$

$$(6) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}};$$

$$(7) \int e^{\sqrt{x+1}} dx;$$

$$(9) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$(10) \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx;$$

$$(11) \int \frac{x^5}{x+\sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$(12) \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3} dx.$$

【解】 (1) $\frac{1}{2} [x \sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2-a^2})] + C.$

(2) $-\frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C.$

(4) $\frac{1}{4} (2x-1) \sqrt{2+x-x^2} - \frac{9}{8} \arcsin\left(\frac{1-2x}{3}\right) + C.$

(6) $\frac{1}{2} [x(x-\sqrt{x^2-1}) + \ln(x+\sqrt{x^2-1})] + C.$

(7) $2e^{\sqrt{1+x}} (\sqrt{1+x} - 1) + C.$

(9) $-6x^{1/6} + 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^{5/6} + \frac{6}{7}x^{7/6} + 6\arctan x^{1/6} + C.$

(10) $2\sqrt{x} - x + \frac{2}{3}x^{3/2} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$

(11) $-\frac{1}{15} \sqrt{1-x^2} (8+4x^2+3x^4) + C.$

(12) $\frac{1+4x}{2(1+x)^2} + \ln(1+x) + C.$

3. 用分部积分法求下列不定积分: ((5)(8)(14)(17) 小题见例 4-6)

(1) $\int x^2 \cos x dx;$

(2) $\int x^3 \ln x dx;$

(3) $\int \ln x dx;$

(4) $\int \arctan x dx;$

(6) $\int x \arctan x dx;$

(7) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx;$

(9) $\int \sec^5 x dx;$

(10) $\int x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx;$

(11) $\int x \sin^2 x dx;$

(12) $\int x \cos^2 x dx;$

(13) $\int \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right) dx;$

(15) $\int (\arcsin x)^2 dx;$

(16) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx;$

(18) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$

【解】 (1) $x^2 \sin x + 2x \cos x - \sin x + C.$ (2) $\frac{1}{16} x^4 (4 \ln x - 1) + C.$

$$(3) x(\ln x - 1) + C.$$

$$(4) x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

$$(6) \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C. \quad (7) -\frac{1+2\ln x}{4x^2} + C.$$

$$(9) \frac{1}{8} \left[\ln \left| \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right| + (3 + 2\sec^2 x) \sec x \tan x \right] + C.$$

$$(10) \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1-x}{1+x} + x \left(2 - x \ln \frac{1-x}{1+x} \right) \right] + C.$$

$$(11) \frac{1}{8} [2x(x - \sin 2x) - \cos 2x] + C.$$

$$(12) \frac{1}{8} [\cos 2x + 2x(x + \sin 2x)] + C. \quad (13) x \ln \ln x + C.$$

$$(15) x \arcsin^2 x + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$$

$$(16) \ln \sin x - x \cot x + C.$$

$$(18) \frac{2}{27} x^{\frac{3}{2}} (8 - 12 \ln x + 9 \ln^2 x) + C.$$

4. 见例 4-7.

5. 求下列有理函数的积分: ((4)(7) 小题见例 4-8)

$$(1) \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - x} dx;$$

$$(2) \int \frac{dx}{(1+x)(x^2+1)};$$

$$(3) \int \frac{x^2}{1-x^4} dx;$$

$$(5) \int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx;$$

$$(6) \int \frac{x+4}{(x^2-1)(x+2)} dx;$$

$$(8) \int \frac{2x-3}{x^2+2x+1} dx;$$

$$(9) \int \frac{dx}{x^2+4x+2};$$

$$(10) \int \frac{dx}{8-2x-x^2}.$$

【解】 (1) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - 3 \ln|x-1| + 8 \ln x - 4 \ln|1+x| + C.$

(2) $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + C.$

(3) $\frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 2 \arctan x \right) + C.$

(5) $2 \ln(x-4) - \ln(x-3) + C.$

(6) $\frac{1}{6} [5 \ln(x-1) - 9 \ln(x+1) + 4 \ln(x+2)] + C.$

(8) $2 \ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + C.$

(9) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{2}} + C.$

$$(10) \frac{1}{6} \ln \frac{x+4}{x-2} + C.$$

6. 求下列三角函数有理式的积分: ((3)(5)(10)(11) 小题见例 4-10)

$$(1) \int \frac{dx}{4+5\cos x};$$

$$(2) \int \frac{dx}{5+4\sin 2x};$$

$$(4) \int \frac{\sec x dx}{(1+\sec x)^2};$$

$$(6) \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x};$$

$$(7) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$(8) \int \frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x};$$

$$(9) \int \tan^3 x dx.$$

【解】 (1) 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则 $x = 2\arctan t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{4+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{9-t^2} dt = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+t}{3-t} \right| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+\tan \frac{x}{2}}{3-\tan \frac{x}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$(2) \frac{1}{6} \left(\arctan \frac{\cos x + 2\sin x}{2\cos x + \sin x} - \arctan \frac{2\cos x + \sin x}{\cos x + 2\sin x} \right) + C.$$

$$(4) \frac{(2+\sec x)\tan x}{3(1+\sec x)^2} + C.$$

$$(6) \frac{1}{3} \left[\ln \sin \frac{x}{2} + \ln(2+\cos x) - 3 \ln \cos \frac{x}{2} \right] + C.$$

$$\begin{aligned} (7) \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \frac{2\sin x \cos x + 1 - 1}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin x + \cos x) dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{\sin x - \cos x}{2} - I, \end{aligned}$$

令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则 $x = 2\arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{2t - t^2 + 1} dt \\ &= - \int \frac{1}{(1-t)^2 - 2} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right| + C = -\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

$$\text{故原式} = \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

$$(8) \cos x - 2\arctan(\cos x) + C. \quad (9) \ln \cos x + \frac{\sec^2 x}{2} + C.$$

7. 求下列无理函数的积分: ((3)(5)(9) 小题见例 4-11)

$$(1) \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})};$$

$$(2) \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx;$$

$$(4) \int x \sqrt{x^2-2x+2} dx;$$

$$(6) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}};$$

$$(7) \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx;$$

$$(8) \int \sqrt{x^2+x+1} dx.$$

$$\text{【解】} (1) = \frac{3\arctan \frac{4x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}} - \frac{3}{2} \ln(1+x^{\frac{1}{6}}) - \frac{9}{4} \ln(1-x^{\frac{1}{6}}+2x^{\frac{1}{3}}) +$$

$\ln x + C.$

$$(2) \frac{1}{2} [x(x-\sqrt{x^2-1}) + \ln(x+\sqrt{x^2-1})] + C.$$

$$(4) \frac{1}{3} [(x-1)^2+1]^{\frac{3}{2}} + \frac{x-1}{2} \sqrt{(x-1)^2+1} + \frac{1}{2} \ln(x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}) + C.$$

$$(6) 2\arcsin \sqrt{x} + C.$$

$$(7) = \frac{1}{4} (3+2x) \sqrt{1+x-x^2} - \frac{7}{8} \arcsin \frac{1-2x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$\begin{aligned} (8) \text{ 原式} &= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \quad \left(\text{令 } \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x+\frac{1}{2}\right) = \tan t, |t| < \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int \sec t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{3}{4} \int \sec t dt \\ &= \frac{3}{4} \left(\sec t \tan t - \int \tan^2 t \sec t dt \right) \\ &= \frac{3}{4} \left(\sec t \tan t - \int (\sec^3 t - \sec t) dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{8} [\sec t \tan t + \ln |\sec t + \tan t|] + C \\
&= \frac{3}{8} \left[\frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \ln \left| \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + x + 1} \right| \right] + C.
\end{aligned}$$

8. 求下列三角函数有理式的积分;

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(b-x)}};$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax^2 + \beta}};$$

$$(3) \int x e^x \sin x dx;$$

$$(4) \int x e^x \cos x dx;$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)};$$

$$(6) \int \tan x \tan(x+\alpha) dx;$$

$$(7) \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(8) \int \frac{\tan x}{1 + \tan x + \tan^2 x} dx;$$

$$(9) \int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx;$$

$$(10) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx;$$

$$(11) \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx;$$

$$(12) \int e^{\sin x} \sin 2x dx;$$

$$(13) \int \arctan(1 + \sqrt{x}) dx;$$

$$(14) \int \frac{dx}{(1+2^x)^4}.$$

【解】 (1) $-\arctan \left(\frac{a+b-2x}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}} \right) + C.$

$$(2) -\frac{\sqrt{ax^2 + \beta}}{\beta x} + C.$$

$$(3) \frac{1}{2} e^x (x \sin x - x \cos x + \cos x) + C.$$

$$(4) \frac{1}{2} e^x (x \cos x + x \sin x - \sin x) + C.$$

$$(5) \frac{\ln \sin(x+b) - \ln(x+a)}{\sin(a-b)} + C.$$

$$(6) [\ln \cos x - \ln \cos(x+\alpha)] \cot \alpha - x + C.$$

$$(7) -\frac{1}{9} [x^3 + 6x + 3(2+x^2) \sqrt{1-x^2} \arccos x] + C.$$

$$(8) x - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1+2\tan x}{\sqrt{3}} + C.$$

$$(9) 2(x-2) \sqrt{1+e^x} + 4 \operatorname{arctanh} \sqrt{1+e^x} + C.$$

$$(10) x \tan \frac{x}{2} + C.$$

$$(11) \ln(\cos x + \sin x) + C.$$

$$(12) 2e^{\sin x}(\sin x - 1) + C.$$

$$(13) x \arctan(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x} + \ln(x + 2\sqrt{x} + 2) + C.$$

$$(14) \frac{11 + 15 \cdot 2^x + 6 \cdot 4^x + 6x(1 + 2^x)^3 \ln 2 - 6(1 + 2^x)^3 \ln(1 + 2^x)}{6 \ln 2 (1 + 2^x)^3} + C.$$

第七章 定积分

§ 1 定积分的概念

1. 见例 4-13. 4. 见例 4-31.

§ 2 定积分的基本性质

1. 见例 4-16. 7. 见例 4-14. 8. 见例 4-17. 10. 见例 4-18.
11. 见例 4-19.

§ 3 微积分基本定理

1. 见例 4-20. 2. 见例 4-15. 4. 见例 4-27. 5. 见例 4-28.

§ 4 定积分的计算

1. 计算下列定积分: ((6)(7)(8)(9) (16)(18) 小题见例 4-21))

$$(1) \int_1^2 \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx;$$

$$(2) \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$$

$$(3) \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{5}} x \sqrt{2-5x} dx;$$

$$(4) \int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$(5) \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$(10) \int_0^4 x(x + \sqrt{x}) dx;$$

$$(11) \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx;$$

$$(13) \int_0^1 x \arctan x dx;$$

$$(15) \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos^2 x dx;$$

$$(19) \int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx;$$

【解】 (1) $\frac{1}{3} - \ln 2$.

$$(3) \frac{2\sqrt{3}}{125} - \frac{14}{375}.$$

$$(5) \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(11) \frac{\pi}{4} - \arctan(\sin 1).$$

$$(13) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

$$(15) \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

$$(19) \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

2. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx;$$

$$(3) \int_0^{2\pi} \cos^6 x dx;$$

$$(5) \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx;$$

【解】 (1) $\frac{128}{315}$. (2) $\frac{16}{15}$. (3) $\frac{5}{8}\pi$. (4) $-\frac{16}{35}$.

(5) 令 $x = a \cos t$, 则 $dx = -a \sin t dt$, 于是,

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \sin^{2n} t \cdot (-a \sin t) dt = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt$$

$$= a^3 I_{2n+1} = a^3 \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}.$$

$$(12) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx;$$

$$(14) \int_0^{2\pi} x^2 \cos^2 x dx;$$

$$(17) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx;$$

$$(20) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^3 (1 - 5x^2)^{10} dx.$$

$$(2) -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$(4) \frac{44}{3}.$$

$$(10) \frac{512}{15}.$$

$$(12) 2.$$

$$(14) \frac{4\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

$$(17) 0.$$

$$(20) \frac{1}{6600}.$$

$$(2) \int_0^{\pi} \sin^5 x dx;$$

$$(4) \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^7 x dx;$$

$$(6) \int_0^1 (1 - x^2)^6 dx.$$

$$(6) \text{ 由(5)题, 原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{13} t dt = \frac{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1024}{3003}.$$

3. 见例 4-26. 4. 见例 4-23. 5. 见例 4-22. 6. 见例 4-24.

7. 见例 4-25. 8. 见例 4-29. 9. 见例 4-30.

第八章 微积分的进一步应用

§1 泰勒公式

1. 写出下列函数在 $x = 0$ 的带皮亚诺余项的泰勒展开式:
(1)(5)(6)(7)(8) 小题见例 3-46))

(1) e^{2x} ; (2) $\cos x^2$; (3) $\ln(1-x)$;

(4) $\frac{1}{(1+x)^2}$; (5) $\frac{x^3+2x+1}{x-1}$.

【解】 (1) $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!} + o(x^n).$

(2) $\cos x^2 = 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} - \frac{(x^2)^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x^2)^{2n-2}}{(2n-2)!} + o(x^{4n-4}).$

(3) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n).$

(4) $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)x^n + o(x^n).$

(5) $\frac{x^3+2x+1}{x-1} = x^2 + x + 3 + \frac{4}{x-1}$
 $= -1 - 3x - 3x^2 - 4x^3 - 4x^4 \cdots - 4x^n + o(x^n).$

2. 写出下列函数在 $x = 0$ 的泰勒公式至所指的阶数:

(1) $e^{\sin x}$, (x^3) ; (2) $\ln \cos x$, (x^6) ;

(3) $\frac{x}{\sin x}$, (x^4) ; (4) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}$, (x^4) .

【解】 (1) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$

(2) $\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6).$

$$(3) \frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4).$$

$$(4) \frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}} = x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).$$

3. 求下列函数在 $x=1$ 的泰勒展开式: ((1)(2) 小题见例 3-47))

$$(3) p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5.$$

【解】 (3) 由于 $p'(x) = 3x^2 - 4x + 3$, $p''(x) = 6x - 4$, $p'''(x) = 6$, $p^{(k)}(x) = 0$, $k \geq 4$.

$$\begin{aligned} p(x) &= p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 7 + 2(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3. \end{aligned}$$

4. 确定常数 a, b 使 $x \rightarrow 0$ 时,

(1) $f(x) = (a + b \cos x) \sin x - x$ 为 x 的 5 阶无穷小;

(2) $f(x) = e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷小.

【解】 (1) $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. (2) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

5. 利用泰勒公式求极限: ((1)(2)(3)(5) 小题见例 3-48))

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{2 \ln(1 + \sin x^2)}.$$

【解】 (4) 原式 = $\frac{1}{4}$.

6. 见例 3-49. 7. 见例 3-50.

8. 设 $P(x)$ 为一 n 次多项式,

(1) 若 $P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)$ 皆为正数, 证明 $P(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上无根;

(2) 若 $P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)$ 正负号相间, 证明 $P(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上无根.

【证明】 (1) 由于 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则 $\forall k > n$, $p^{(k)}(x) = 0$, 于是 $P(x)$ 在 $x = a$ 处的泰勒展开式:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

由于 $P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)$ 皆为正数, 则 $\forall x > a$, 都有 $P(x) > 0$, 故 $P(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上无根.

(2) 同(1) 类似, $P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots +$

$$\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = P(a) - P'(a)(a-x) + \frac{P''(a)}{2!}(a-x)^2 + \cdots + (-1)^n$$

$$\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(a-x)^n.$$

同样由条件可得 $\forall x \in (-\infty, a)$, 有 $P(x) > 0$, 也就说明了 $P(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上无根.

9. 求证

$$(1) e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1); \quad (2) e \text{ 是无理数.}$$

【证明】 (1) 由于 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{(n+1)}$, θ 在 0 与 x 之间, 令 $x = 1$, 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

(2) 假设 e 是有理数, 则 $e = \frac{p}{q}$, 其中 p 和 q 为互质的整数, 由

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \quad \text{知 } e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} > 0, \text{ 则}$$

$$0 < n! \left[e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \right] = \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}.$$

由假设, 当 $n > \max\{q, 3\}$ 时, 数 $n! \left[e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \right]$ 应为整数, 它不可能在 0 与 $\frac{3}{n+1}$ 之间, 因此矛盾, 于是 e 必为无理数.

10. 见例 3-51. 11. 见例 3-53. 12. 见例 3-54.

§ 2 微积分在几何与物理中的应用

1. 见例 4-38. 2. 见例 4-35. 6. 见例 4-39. 8. 见例 4-37.

9. 见例 4-36. 10. 见例 4-40. 11. 见例 4-41. 18. 见例 4-42.

第九章 再论实数系

§1 实数连续性的等价描述

1. 求数列 $\{x_n\}$ 的上、下确界: ((5) 小题见例 2-1)

(1) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$; (2) $x_n = n[2 + (-2)^n]$;

(3) $x_{2k} = k, x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$;

(4) $x_n = [1 + (-1)^n]^{\frac{n+1}{n}}$; (6) $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

【解】 (1) $\sup\{x_n\} = 1, \inf\{x_n\} = x_1 = 0$. (2) 无上确界, 也无下确界.

(3) 无上确界, $\inf\{x_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1$.

(4) $\sup\{x_n\} = x_2 = 3, \inf\{x_n\} = x_{2k-1} = 0$.

(6) $\sup\{x_n\} = 1, \inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}$.

2. 设 $f(x)$ 在 D 上定义, 求证

(1) $\sup_{x \in D} [-f(x)] = -\inf_{x \in D} f(x)$; (2) $\inf_{x \in D} [-f(x)] = -\sup_{x \in D} f(x)$.

【证明】 (1) 设 $\sup_{x \in D} [-f(x)] = \beta$, 则 $\forall x \in D, -f(x) \leq \beta \Rightarrow f(x) \geq -\beta$;

$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in D, -f(x_0) > \beta - \varepsilon \Rightarrow f(x_0) < -\beta + \varepsilon$. 从而

$\inf_{x \in D} f(x) = -\beta = -\sup_{x \in D} [-f(x)]$, 即 $\sup_{x \in D} [-f(x)] = -\inf_{x \in D} f(x)$.

(2) 证法同(1).

3. 见例 2-2.

4. 试证收敛数列必有上确界和下确界, 趋于 $+\infty$ 的数列必有下确界, 趋于 $-\infty$ 的数列必有上确界.

【证明】 由于收敛数列必有界, 由确界存在原理知, 该数列必有上、下确界.

若 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 则对于 $G = 1, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{当 } n > N \text{ 时, 有 } x_n > G = 1$. 令 $m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_N, 1\}$, 则 $\forall n$, 有 $x_n \geq m$, 即 $\{x_n\}$ 有下界, 所以 $\{x_n\}$ 有下确界. 类似可证, 当 $x_n \rightarrow -\infty (n \rightarrow \infty)$ 时, $\{x_n\}$ 有上

确界.

5. 试分别举出满足下列条件的数列:

- (1) 有上确界无下确界的数列; (2) 含有上确界但不含有下确界的数列;
(3) 既含有上确界又含有下确界的数列; (4) 既不含有上确界又不含有下确界的数列, 其中上、下确界都有限.

【解】 (1) $\{x_n\} = \{-n\}; -1, -2, -3, \dots, -n, \dots;$

(2) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$

(3) $\{x_n\}; 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$

(4) $1, 2 - 1, \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}, \dots.$

§2 实数闭区间的紧致性

1. 见例 2-28. 2. 见例 2-26.

3. 用区间套定理证明单调有界数列必有极限.

【证明】 不妨设 $\{x_n\}$ 为单调上升有界的数列, 则 $\exists a_1, b_1$, 使 $a_1 \leq x_n \leq b_1, n = 1, 2, \dots$. 将区间 $[a_1, b_1]$ 二等分. 若 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ 是 $\{x_n\}$ 的上界, 即 $\forall n$, 有 $x_n \leq \frac{a_1 + b_1}{2}$, 则记 $a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$; 若 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ 不是 $\{x_n\}$ 的上界, 即 $\exists x_n \in \{x_n\}$, 使 $x_n > \frac{a_1 + b_1}{2}$, 则记 $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, b_2 = b_1$.

由 $\{x_n\}$ 的单调性, 可知 $[a_2, b_2]$ 中含有 $\{x_n\}$ 的某项以后所有的项, 继续做下去, 可得一区间套 $\{[a_n, b_n]\}$, 在每个闭区间 $[a_n, b_n]$ 中含有 $\{x_n\}$ 的某项以后所有的项.

由闭区间套定理, 存在惟一实数 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$. 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, 使得 $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. 又 $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ 中含有 $\{x_n\}$ 的某项以后所有的项. 于是 $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, $x_n \in [a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$.

4. 试分析区间套定理的条件: 若将闭区间列改为开区间列, 结果怎样? 若将条件 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ 去掉或将条件 $b_n - a_n \rightarrow 0$ 去掉, 结果怎样?

试举例说明.

【证明】 若将闭区间列改为开区间列, 则可能找不到实数 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 如: $\left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) \right\}$, 虽然 $\left(0, \frac{1}{n} \right) \supset \left(0, \frac{1}{n+1} \right)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 但是 $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = \emptyset$. 若将 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 去掉, 则找到的 r 可能不惟一. 如: $\left\{ \left[0, 1 + \frac{1}{n} \right] \right\}$, 虽然 $\left[0, 1 + \frac{1}{n} \right] \supset \left[0, 1 + \frac{1}{n+1} \right]$, 但是 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, 1 + \frac{1}{n+1} \right] = [0, 1]$, 所以 r 不惟一. 若将 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ 去掉与去掉条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 所得结果一样.

5. 见例 2-3. 6. 见例 2-4.

7. 求证数列 $\{a_n\}$ 有界的充要条件是, $\{a_n\}$ 的任何子数列 $\{a_{n_k}\}$ 都有收敛的子数列.

【证明】 充分性. 因 $\{a_n\}$ 有界, 故它的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也有界. 根据紧致性定理知, $\{a_{n_k}\}$ 必有收敛的子列.

必要性. 用反证法. 假设 $\{a_n\}$ 无界, 则由第 5 题, $\{x_n\}$ 必有子列 $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k} \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). 于是 $\{x_{n_k}\}$ 没有收敛的子数列. 矛盾.

8. 见例 2-8.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界, 求证存在 $c \in [a, b]$, 对任给 $\delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ 上无界.

【证明】 用反证法. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处局部有界, 即 $\forall x \in [a, b]$, $\exists \delta_x > 0$ 和常数 $M_x > 0$, 使得 $|f(t)| < M_x$, $\forall t \in O(x, \delta_x) \cap [a, b]$. 从而得到了闭区间 $[a, b]$ 的一个覆盖 $E = \{O(x, \delta_x) \mid x \in [a, b]\}$. 由有限覆盖定理, 存在 E 的有限子覆盖, 记为 $O_1(x_1, \delta_1)$, $O_2(x_2, \delta_2)$, \dots , $O_k(x_k, \delta_k)$. 取 $M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$, 由于 $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k O_i(x_i, \delta_i)$, 故 $\forall x \in [a, b]$, $|f(x)| < M$, 即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界. 矛盾.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有第一类间断点, 定义 $\omega(x) = |f(x-0) - f(x+0)|$. 求证对任意 $\epsilon > 0$, $\omega(x) \geq \epsilon$ 的点 x 只有有限多个.

【证明】 用反证法. 假设 $\exists \epsilon_0 > 0$, $E = \{x \in [a, b] \mid \omega(x) \geq \epsilon_0\}$ 是无限集. 则 $\exists \{x_n\} \subset E$, $x_n \rightarrow r \in [a, b]$ ($n \rightarrow \infty$). 不妨设 $r \in (a, b)$. 从而在 r 的任何小邻域内都有无限多个第一类间断点, 不妨设 $\{x_n\}$ 都在 r 的左侧附近. 又 $f(x)$ 在

$[a, b]$ 上只有第一类间断点, 则 $\lim_{x \rightarrow r^-} f(x)$ 存在, 设为 A . 从而 $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (r - \delta, r) \cap [a, b]$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而 $\forall x', x'' \in (r - \delta, r)$, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$. 因 $x_n \rightarrow r$, 所以 $\exists x_N \in \{x_n\}$, 使 $x_N \in \left(r - \frac{\delta}{2}, r\right)$. 这时 $|f(x_N + 0) - f(x_N - 0)| \geq \varepsilon_0$. 分别在 x_N 两侧附近取 x'_N, x''_N , 使 x'_N, x''_N 同时属于 $(r - \delta, r)$, 且 $|f(x'_N) - f(x_N - 0)| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, $|f(x''_N) - f(x_N + 0)| < \frac{\varepsilon_0}{4}$. 则

$$|f(x'_N) - f(x''_N)| \geq |f(x_N + 0) - f(x_N - 0)| - |f(x'_N) - f(x_N - 0)| - |f(x''_N) - f(x_N + 0)| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2},$$

与 $|f(x'_N) - f(x''_N)| < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$ 矛盾.

12. 见例 2-23.

§ 3 实数的完备性

1. 见例 2-24.

2. 见例 2-6.

3. 利用柯西收敛原理讨论下列数列的收敛性: ((3) 小题见例 2-8)

(1) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n$ ($|q| < 1, |a_k| \leq M$);

(2) $x_n = 1 + \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$.

【解】 (1) $\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}^+$, 考虑

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |a_{n+1}q^{n+1} + \cdots + a_{n+p}q^{n+p}| \leq |a_{n+1}| \cdot |q^{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \cdot |q^{n+p}| \\ &\leq M \cdot |q|^{n+1}(1 + |q|^2 + \cdots + |q|^{p-1}) \\ &= \frac{M|q|^{n+1}(1 - |q|^p)}{1 - |q|} < \frac{M|q|^{n+1}}{1 - |q|} < \varepsilon \\ &\Rightarrow n > \frac{\ln[\varepsilon \cdot (1 - |q|)] - \ln M}{\ln |q|} - 1. \end{aligned}$$

所以令 $N = \max \left\{ \left\lceil \frac{\ln[\varepsilon \cdot (1 - |q|)] - \ln M}{\ln |q|} \right\rceil, 1 \right\}$, 则 $\forall n > N, \forall m > N$ 都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$. 于是 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon < 1$, $\forall p \in \mathbb{N}^+$, 考虑

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} \right] \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon \\ &\Rightarrow n > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}, \end{aligned}$$

若令 $N = \left\lceil \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rceil + 1$, 则 $\forall n > N, \forall m > N$, 都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$. 从而 $\{x_n\}$ 收敛.

4. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充要条件是: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$, 时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

【证明】 必要性. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, 有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 故当 $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

充分性. 在 x_0 的附近任取一以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 且 $x_n \neq x_0 (n = 1, 2, \dots)$, 则对于 $\delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall m > N$, 有 $0 < |x_n - x_0| < \varepsilon, 0 < |x_m - x_0| < \varepsilon$, 由题设就有 $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. 那么由柯西收敛原理, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在. 由 $\{x_n\}$ 的任意性可知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在. (海涅定理)

5. 证明 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x' - x_0| < \delta, |x'' - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

【证明】 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 由第 4 题可知: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$. 当 $|x' - x_0| < \delta, |x'' - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

6. 证明下列极限不存在:

(1) $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3};$

(2) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}};$

(3) $x_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + n})$; (4) $x_n = \cos n$; (5) $x_n = \tan n$.

【证明】(1) 取 $\epsilon_0 < \frac{1}{2}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 取 $n = 3N - 1$, $p = 2$, 那么,

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{3N-1}{3N+1} \cos \frac{2}{3} 3N\pi + \frac{3N}{3N+2} \cos \frac{2}{3} (3N+1)\pi \right| \\ &= \left| \frac{3N-1}{3N+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3N}{3N+2} \right| \\ &= 1 - \frac{2}{3N+1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3N+2} \right) \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 不存在极限.

(2) 取 $\epsilon_0 < 2 - \sqrt{2}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 取 $p = 2$, $n = 2N - 1$, 则

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| (1 + 2^{2N})^{\frac{1}{2N}} - \left(1 + \frac{1}{2^{2N+1}} \right)^{\frac{1}{2N+1}} \right| \\ &\geq \frac{1}{2} [2 \cdot 2 - 2 \cdot 2^{2N+1} \sqrt{2}] \geq \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{2} = \epsilon_0. \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 极限不存在.

(3) 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 取 $n = 2N$, $m = 2N + 1$, 于是有

$$2N + \frac{1}{4} \leq \sqrt{n^2 + n} = \sqrt{(2N)^2 + 2N} \leq 2N + \frac{3}{4},$$

即有 $x_n = \sin(1 + \sqrt{n^2 + n}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $2N + 1 \leq \sqrt{m^2 + m} = \sqrt{(2N+1)^2 + (2N+1)} \leq 2N + 2$, 即有

$$x_m = \sin(\pi \sqrt{m^2 + m}) \leq 0,$$

从而 $|x_n - x_m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} = \epsilon_0$. 故 $\{x_n\}$ 不存在极限.

(4) 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 可以找到自然数 n'_N 和 n''_N , 使得 $\cos n'_N \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos n''_N \leq 0$, 且 $n'_N > N$, $n''_N > N$, 因此 $\cos n'_N - \cos n''_N > \frac{1}{2} = \epsilon_0$. 故 $\{x_n\}$ 不存在极限.

(5) 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$, 可以找到自然数 n'_N 和 n''_N , 使得 $\tan n'_N \geq 1$, $\tan n''_N \leq 0$, 且 $n'_N > N$, $n''_N > N$, 因此 $\tan n'_N - \tan n''_N \geq 1 > \frac{1}{2} = \epsilon_0$.

故 $\{x_n\}$ 不存在极限.

7. 见例 2-7. 8. 见例 2-9. 9. 见例 2-10.

§ 4 再论闭区间上连续函数的性质

1. 见例 2-11.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 可微; 又设

(1) $\min_{a \leq x \leq b} f(x) < p < \max_{a \leq x \leq b} f(x)$;

(2) 如果 $f(x) = p$, 则有 $f'(x) \neq 0$.

求证 $f(x) = p$ 的根只有有限多个.

【证明】 用反证法. 假设 $f(x) = p$ 的根有无穷多个. 由于它们是有界的, 则根据紧致性定理, 其存在收敛的子列 $\{x_n\}: x_n \rightarrow x_0 \in [a, b]$, 又 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 那么就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, 而 $\forall x_n$, 有 $f(x_n) = p$, 也就有

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = p$, 可得 $f(x_0) = p$. 考虑 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. 由海涅

定理, 有 $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$. 矛盾.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, 求证存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 且 $f(x) > 0$ ($\xi < x \leq b$).

【证明】 构造数集

$$E = \{c \mid c < b, x \in [c, b], f(x) > 0\}.$$

由 $f(x)$ 的连续性, 及 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, 知, E 非空且 $\forall c \in E, a < c$, 即 E 有下界. 由确界存在原理知, E 有下确界. 设 $\xi = \inf E$. 下面证明 $f(\xi) = 0$. 若不然, 则 $f(\xi) > 0$ 或 $f(\xi) < 0$. 不妨设 $f(\xi) > 0$. 由 $f(x)$ 的连续性知, $\exists \delta_0 > 0, \forall x \in [\xi - \delta_0, \xi + \delta_0]$, 有 $f(x) > 0$. 再由 $\xi < \xi + \delta_0$ 及 E 的构造知, $\xi + \delta_0 \in E$. 因此当 $x \in [\xi - \delta_0, \xi + \delta_0] \cup [\xi + \delta_0, b] = [\xi - \delta_0, b]$ 时, 有 $f(x) > 0$. 故 $\xi - \delta_0 \in E$, 这与 $\xi = \inf E$ 矛盾. 对任意 $x_0 \in (\xi, b]$, 取 c 使 $\xi < c < x_0$, 则 $c \in E$. 从而 $\forall x \in [c, b], f(x) > 0$, 当然 $f(x_0) > 0$. 由 x_0 的任意性知, $\forall x \in (\xi, b], f(x) > 0$.

5. 见例 2-12. 6. 见例 2-13. 7. 见例 2-14.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上满足李普希兹条件, 即存在常数 K , 使得 $|f(x') - f(x'')| \leq K|x' - x''|, x', x'' \in (a, b)$. 证明: $f(x)$ 在 (a, b) 一

致连续.

【证明】 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta =$

$\frac{\varepsilon}{K}$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2| < K \cdot \delta = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

这就证明了 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续.

9. 见例 2-15. 10. 见例 2-16. 11. 见例 2-17. 12. 见例 2-18.

13. 见例 2-19.

14. 求证 $f(x) = x \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

【证明】 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 1) = +\infty$, 从而由第 13 题的结论知 $f(x) = x \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致连续.

§5 可积性

1. 判断下列函数在区间 $[0, 1]$ 的可积性: ((1)(2) 小题见例 4-33)

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x} \right]}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

【解】 (3) 和 (4) 小题都是例 4-32 的特例. 其中第 (4) 小题也可以验证 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调, 由定理 9-10 知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积.

2. 讨论 $f(x)$, $f^2(x)$, $|f(x)|$ 三者间可积性的关系.

【解】 ① 若 $f(x)$ 可积, 则 $f^2(x)$, $|f(x)|$ 可积. ② 若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 可积, 但 $f(x)$ 不一定可积. 例如函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数} \\ -1, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$. ③ $f^2(x)$ 可积 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 可积.

3. 见例 4-51. 4. 见例 4-52. 5. 见例 4-53. 6. 见例 4-54.

7. 见例 4-55. 8. 见例 4-34. 10. 见例 4-56. 11. 见例 4-57.

12. 见例 4-58.

第十章 数项级数

§2 数项级数的收敛性及其基本性质

1. 求下列级数的和: ((4)(6) 见例 7-11)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{2}{3}.$$

2. 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \text{ (发散);}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \text{ (收敛);}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2n+1} \text{ (发散);}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \text{ (收敛);}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \text{ (收敛).}$$

3. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (\text{提示: 对部分和数列应用数列极限的运算法则})$$

4. 参见例 7-2.

§3 正项级数

1. 判别下列级数的收敛性: ((5)(6)(10)(11)(15)(17)(19) 见例 7-12, (16) 见例 7-49, (20)(21) 见例 7-47)

$$\begin{array}{lll}
 (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}; & (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}; & (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}; \\
 (4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; & (7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^n; & (8) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\ln(n+1)} \right]^n; \\
 (9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}; & (12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}; & (13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{n^n}; \\
 (14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{n^n}; & (18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}; & (20) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}; \\
 (21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}; & (22) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}; & (23) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{\sqrt{n}}}.
 \end{array}$$

【解】 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}{\frac{1}{n}} = 1$, 由比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 发散.

(2) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)2^{2n-1}}{(2n+1)2^{2n+1}} = \frac{1}{4} < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ 收敛.

(3) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2n-1} = \frac{1}{2}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$ 发散.

(4) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{2^n} / \frac{\pi}{2^n} \right) = 1$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(7) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^n$ 收敛.

(8) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n+1)} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ 收敛.

(9) 由于 $\frac{2+(-1)^n}{2^n} < \frac{3}{2^n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

(12) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{1}{2} < 1$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$ 收敛.

(13) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{1+n} \right)^n = \frac{2}{e} < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$ 收敛.

(14) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$, 故

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$ 发散.

(18) 由于当 n 充分大时, $\frac{1}{n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ 收敛.

(20) 解法二 由于 $2^{\ln n} = e^{\ln 2^{\ln n}} = n^{\ln 2}$, 由于当 n 充分大时, $\frac{1}{n^{\ln 2}} > \frac{1}{n}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$ 发散.

(21) 解法二 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ 收敛, 判别方法与(20)相同.

(22) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^{\sqrt{n+1}}} \right) / \left(\frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \right) = \frac{1}{3} < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛.

(23) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{3^{\sqrt{n+1}}} \right) / \left(\frac{n}{3^{\sqrt{n}}} \right) = \frac{1}{3} < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛.

2. 利用泰勒公式估算无穷小量的阶, 从而判别下列级数的收敛性: ((1) 见例 7-20)

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}.$$

【解】 令 $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}$, $n > 1$, 则 $a_n < 0$, 且

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)^p \ln \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) = o \left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}} \right), \text{ 故仅当 } \frac{p}{2} + 1 > 1,$$

即 $p > 0$ 时, 级数收敛.

3. 见例 7-5. 4. 见例 7-3.

5. 设
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n^2}, & n \neq k^2, k = 1, 2, \dots \\ a_{k^2} = \frac{1}{k^2}, & n = k^2, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$
 求证 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0.$$

【证明】 (1) 记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 令 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, $\lambda_n = \sum_{k=1}^{\sqrt{n}+1} \frac{1}{k^2}$, 则 $S_n = \sigma_n + \lambda_n \leq 2\sigma_n$. 由级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收敛知, $\exists M > 0, \forall n$, 有 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{M}{2}$, 从而有 $S_n \leq M, \forall n$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 因为当 $n = k^2, na_n = 1, \forall k = 1, 2, \dots$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0$.

6. 讨论下列级数的收敛性: ((2) 小题见例 7-13, (4) 小题见例 7-52)

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

【解】 (1) 由于不论 p 为何数, 当 x 充分大时, 函数 $\frac{1}{x \ln^p x}$ 都是非负单调

$$\text{下降的, 并且 } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \begin{cases} \left. \frac{1}{(1-p)\ln^{p-1} x} \right|_2^{+\infty}, & p \neq 1 \\ \ln \ln x \Big|_2^{+\infty}, & p = 1 \end{cases} \quad \text{仅当 } p > 1 \text{ 时收敛,}$$

故级数仅当 $p > 1$ 时收敛.

7. 见例 7-51.

8. 设 $a_n \geq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. 反之是否成立?

【证明】 利用前面章节的结果知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. 反之不成立.

例如, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3 + (-1)^n}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. 但是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2[3 + (-1)^n]} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n \text{ 为偶数} \\ 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad \text{故极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ 不存在.}$$

9. 利用级数收敛的必要条件证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0 \quad (a > 1).$$

【证明】 (1) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} / \frac{n^n}{(n!)^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \right] = 0 < 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

(2) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2(n+1))!}{a^{(n+1)!}} / \frac{(2n)!}{a^{n!}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{a^{n+1}} = 0 < 1 (a > 1)$. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}}$ 收敛, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0 (a > 1)$.

11. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛.

【证明】 由于 $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛.

12. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, 求证 (1) 当 $l > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛; (2) 当 $l < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 发散. 问 $l = 1$ 时会有什么结论?

【证明】 (1) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l > 1$ 知, 当 n 充分大时, $a_n > 1$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛;

(2) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l < 1$ 知, 当 n 充分大时, $a_n < 1$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 发散;

当 $l = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 的敛散性不定.

§ 4 一般项级数

1. 讨论下列级数的收敛性: ((5)(6) 小题见例 7-14, (8)(14)(15)(16) 小题见例 7-15, (9)(10) 小题参考例 7-19)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} (p > 0);$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n};$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)^2};$$

$$(13) \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots;$$

【解】 (1) 收敛. (2) 收敛. (4) 发散. (7) 当 $0 < p \leq 1$ 时, 条件收敛; 当 $p > 1$ 时, 绝对收敛. (11) 收敛. (12) 收敛. (13) 发散.

2. 讨论下列级数是否绝对收敛或条件收敛: ((3) 小题参考例 7-27, (4) 小题见例 7-53, (6) 小题见例 7-20, (7)(8) 小题参考例 7-18, (14) 小题参考例 7-50)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} (0 < x < \pi);$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n r^n \sqrt{n} (r > 0); \quad (13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p}.$$

【解】 (1) 当 x 为负整数时, 级数显然无意义; 当 x 不为负整数时, 条件收敛.

(2) 绝对收敛. (10) 当 $0 < r < 1$ 时, 绝对收敛; 当 $r \geq 1$ 时, 发散.

(13) 当 $p > 2$ 时绝对收敛; 当 $p \leq 0$ 时发散; 当 $1 < p \leq 2$ 时条件收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时发散.

3. 见例 7-8. 4. 见例 7-4.

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 问能否断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛? 研究例子

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad b_n = a_n + \frac{1}{n}.$$

【解】 由莱布尼茨判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{(-1)^n \sqrt{n}} \right] = 1$. 然而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{n} \right)$ 发散, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 所以不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

6. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (A)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (B)$ 都收敛, 且 $a_n \leq c_n \leq b_n (n = 1, 2, \dots)$

2, ...), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (C)$ 也收敛. 若级数(A)与(B)都发散, 问级数(C)收敛性如何?

【证明】提示: 对部分和数列应用夹迫原理即得证. 若级数(A)与(B)均发散, 则(C)可能收敛也可能发散. 例如: $-1-1-1-\dots$ 与 $1+1+1+\dots$ 均发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 当 $c_n = 0$ ($-1 < c_n < 1$) 时收敛; 当 $c_n = \frac{1}{2}$ ($-1 < c_n < 1$) 时, (C) 发散.

7. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 则当 $x > x_0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 也收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 发散, 则当 $x < x_0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 也发散.

【证明】(I) 由于 $\frac{a_n}{n^x} = \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 且当 $x > x_0$ 时, $\left\{ \frac{1}{n^{x-x_0}} \right\}$ 单调下降趋于 0, 于是由阿贝尔判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x > x_0$ 时收敛.

(II) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 发散, 考虑 $x < x_0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 的敛散性. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 是收敛的, 由于 $x_0 > x$, 由(I)知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 也收敛, 这与条件矛盾. 故假设不成立, 即有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x < x_0$ 时发散.

8. 见例 7-6. 9. 见例 7-7. 10. 见例 7-4. 11. 见例 7-16.

12. 见例 7-9. 13. 见例 7-48.

14. 下列是非题, 对的请给予证明, 错的请举出反例:

(1) 若 $a_n > 0$, 则 $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \dots$ 收敛.

(2) 若 $a_n \rightarrow 0$, 则 $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \dots$ 收敛.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 绝对收敛.

(5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 a_n 不趋于 0. (8) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

【解】 (1) 错. 如 $a_n = 1, n = 1, 2, 3, \dots$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, 该级数是发散的.

(2) 正确(利用定义或柯西收敛原理).

(3) 错. 如 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

(4) 对. 提示: 当 n 充分大时, $|a_n^3| \leq a_n^2$.

(5) 错. 如 $a_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

(8) 错. 如: $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散.

第十一章 广义积分

§1 无穷限广义积分

1. (2)(4)(6) 小题见例 8-1, 其他略.

2. 讨论下列积分的收敛性: ((2) 小题见例 8-3, (4)(10)(16) 小题见例 8-2)

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}};$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx;$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x} dx;$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n} dx (n, m > 0);$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1};$$

$$(8) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 + x^2}};$$

$$(9) \int_1^{+\infty} x^p e^{-x} dx;$$

$$(11) \int_1^{+\infty} \frac{\ln^n x}{x^2} dx;$$

$$(12) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx;$$

$$(14) \int_1^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] dx;$$

$$(15) \int_1^{+\infty} \ln \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right) dx.$$

【解】 (1) 收敛. (3) 收敛. (5) 发散. (6) 由于 $n, m > 0$, 则 $f(x) = \frac{x^m}{1+x^n}$ 在 $[0, +\infty)$ 有定义. 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} \frac{x^m}{1+x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1$, 故原积分仅当 $n-m > 1$ 时收敛. (7) 收敛. (8) 收敛. (9) 收敛. (11) 收敛.

(12) $\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right)$, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散; $\forall A > 1$, $\left| \int_1^A \cos 2x dx \right| \leq 2$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 单调趋于 0, 故由狄利克雷判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ 收敛, 从而原积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散. (14) 收敛. (15) 发散.

3. 讨论下列无穷积分的收敛性(包括绝对收敛或条件收敛): ((2)(4)(7) 小题见例 8-7)

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx; \quad (3) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx.$$

【解】 (1) $\frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ 发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ 收敛, 故原积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx$ 发散.

(3) 当 $p > 1$ 时, 由于 $\left| \frac{\cos x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 故 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时, 由狄利克雷判别法知, 积分收敛, 但 $\left| \frac{\cos x}{x^p} \right| \geq \frac{1}{2x^p} + \frac{\cos 2x}{2x^p}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p} dx$ 发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p} dx$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| dx$ 发散. 故 $0 < p \leq 1$ 当时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 发散.

4. 设 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $a \leq x < +\infty$, $h(x)$ 在任意有限区间 $[a, A]$ 可积, 又 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 求证 $\int_a^{+\infty} h(x) dx$ 收敛.

【证明】 提示: 应用无穷限积分的柯西收敛原理.

5. 证明: 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 举例说明其逆不成立.

【证明】 因为 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 根据无穷限积分的柯西收敛原理, $\forall \varepsilon > 0, \exists A > \max\{0, a\}, \forall A'', A' > A$, 有 $\left| \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$. 从而

$\left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| \leq \left| \int_A^{A'} |f(x)| dx \right| < \epsilon$, 所以积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛. 反之不成立, 如 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx$ 发散.

6. 见例 8-5. 7. 见例 8-4. 8. 见例 8-36.

9. 设 $f(x)$ 单调下降趋于零, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续. 求证 $\int_1^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 收敛.

$$\begin{aligned} \text{【证明】 } \int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx &= \int_0^{+\infty} \sin^2 x df(x) = [f(x) \sin^2 x] \Big|_0^{+\infty} \\ &\quad - \int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) \sin^2 A - \int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x dx. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 单调下降趋于 0, 则 $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) = 0$, 于是 $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) \sin^2 A = 0$. 由狄利克雷判别法知, $\int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x dx$ 收敛. 于是积分 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 收敛.

10. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数, 且在任何有限区间 $[a, A]$ 上可积. 证明: 若 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g^2(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]^2 dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 也收敛.

【证明】 由于 $0 \leq |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$, 而 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g^2(x) dx$ 都收敛, 所以 $\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} [f^2(x) + g^2(x)] dx$ 收敛, 于是由比较判别法知, $\int_a^{+\infty} |f(x)g(x)| dx$ 收敛, 从而 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 收敛. 又 $[f(x) + g(x)]^2 = f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)$, 故 $\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]^2 dx = \int_a^{+\infty} [f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)] dx$ 收敛.

11. 见例 8-42.

§2 瑕积分

1. 下列积分是否收敛? 若收敛求其值: ((4) 小题见 8-6)

$$(1) \int_0^{\frac{1}{2}} \cot x dx; \quad (2) \int_0^1 \ln x dx; \quad (3) \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}}.$$

【解】 (1) $\int_0^{\frac{1}{2}} \cot x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin x} d\sin x = +\infty$, 所以该积分发散.

$$(2) \int_0^1 \ln x dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\int_{\eta}^1 \ln x dx \right] = -1, \text{ 所以该积分收敛, 其值为 } -1.$$

$$(3) \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^{a-\eta} \frac{d(a-x)}{\sqrt{a-x}} = 2\sqrt{a}.$$

2. 讨论下列积分的收敛性: ((2) (4) (5) 小题见 8-10, (6) 小题见 8-38, (8) (11) 小题见 8-8, (9) 小题见 8-9)

$$(1) \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx; \quad (3) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx;$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}; \quad (12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln \sin x dx.$$

【解】 (1) 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}$, 显然 $x=0$ 是惟一的瑕点. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} = 1$, 故该积分收敛.

(3) $f(x) = \frac{\ln x}{1-x^2}$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{x}}{-2x} = -\frac{1}{2}$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上只有一个瑕点 $x=0$. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} = 0$, 故原积分收敛.

(7) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$, 所以 $x=0$ 不是 $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ 的瑕点, 即其在 $[0, 1]$ 内只有一个瑕点 $x=1$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \cdot \frac{1}{|\ln x|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{-\frac{1}{x}} = 1$, 故原积分发散.

(12) $f(x) = \cos x \ln \sin x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内只有一个瑕点 $x=0$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} |\cos x \ln \sin x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos x (\sin x)^{\frac{1}{2}} |\ln \sin x| = 0$, 所以原积分收敛.

3. 判别敛散性: ((1) 小题见 8-37, (4) (7) 小题见 8-11, (6) 小题见 8-14)

$$(2) \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx; \quad (5) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}; \quad (8) \int_{-\infty}^0 e^x \ln |x| dx.$$

【解】 (2) $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = I_1 + I_2.$

对于 I_1 : 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-p}(x^{p-1} e^{-x}) = 1$, 故 $1-p < 1$, 即 $p > 0$ 时, I_1 收敛.

对于 I_2 : 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(x^{p-1} e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$, 故对于任意 p 值, I_2 恒收敛.
于是, 当 $p > 0$ 时, 原积分收敛.

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = I_1 + I_2.$$

对于 I_1 : 对于任意的 p , 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^q \frac{1}{x^p \ln^q x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^p} \left(\frac{x-1}{\ln x} \right)^q = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln x} \right)^q = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} \right)^q = 1$, 故仅当 $q < 1$ 且 $\forall p \in \mathbb{R}$ 时, I_1 收敛.

对于 I_2 : ① 若 $p > 1$, 取 $\alpha: 1 < \alpha < p$, 对于任意的 q , 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{1}{x^p \ln^q x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-\alpha} \ln^q x} = 0$, 于是此时 I_2 收敛.

② 若 $p \leq 1$, $q < 1$, 由于 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \geq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} \Big|_2^{+\infty} = +\infty$, 则此时 I_2 发散.

综上所述, 当 $p > 1$, $q < 1$ 时, 原积分收敛.

$$(8) \text{ 令 } -x = t, \text{ 则原式 } = \int_{+\infty}^0 e^{-t} \ln |-t| d(-t) = \int_0^1 \frac{\ln t}{e^t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t} dt = I_1 + I_2.$$

对于 I_1 : 由于 $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\ln t}{e^t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^t} |t^{\frac{1}{2}} \ln t| = 0$, 所以 I_1 收敛;

对于 I_2 : 由于 $\left| \frac{\ln t}{e^t} \right| \leq \frac{1}{e^t}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^t} dt = \int_1^{+\infty} -de^{-t} = -e^{-t} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$, 所以 I_2 收敛. 故原积分收敛.

4. 见例 8-12. 6. 见例 8-6.

7. 利用第 6 题结果, 证明:

$$(1) \int_0^\pi \theta \ln(\sin \theta) d\theta = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2;$$

$$(2) \int_0^\pi \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} d\theta = 2\pi \ln 2;$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \ln(\sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} - \ln 2 \right);$$

$$(4) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

【证明】 (1) 令 $\theta = x - t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \theta \ln(\sin \theta) d\theta = \int_{\pi}^0 (x-t) \ln \sin(x-t) d(x-t) \\ &= \pi \int_0^{\pi} \ln \sin t dt - \int_0^{\pi} t \ln \sin t dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} \ln \sin \theta d\theta - I, \end{aligned}$$

解得 $I = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2$.

$$\begin{aligned} (2) I &= \int_0^{\pi} \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\theta}{1 - \cos \theta} d(1 - \cos \theta) = \int_0^{\pi} \theta d \ln(1 - \cos \theta) \\ &= \pi \ln 2 - \int_0^{\pi} \ln \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \pi \ln 2 - \int_0^{\pi} \ln 2 d\theta - 2 \int_0^{\pi} \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \ln \sin t dt = 2\pi \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \ln(\sin \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \ln(\sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin \theta) d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \ln(\sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin \theta) d \sin 2\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} - \ln 2 \right). \end{aligned}$$

(4) 令 $x = \tan t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t} \cdot \sec^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos t} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) dt - \cos t \right] dt.$$

$$\text{令 } t = \frac{\pi}{4} - u, \text{ 有 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \cos u d(-u) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos z dz,$$

$$\text{所以 } I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

第十二章 函数项级数

§1 函数序列的一致收敛概念

1. 讨论下列函数序列在所示区域的一致收敛性: ((7) 小题见例 7-54, (11) 小题见例 7-23)

$$(1) f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(2) f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, (I) x \in (-l, l); (II) x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(3) f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, x \in (0, 1);$$

$$(4) f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, (I) x \in [a, +\infty), a > 0, (II) x \in (0, +\infty);$$

$$(5) f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1+n^3 x^3}, (I) x \in [a, +\infty), a > 0, (II) x \in (0, +\infty);$$

$$(6) f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, x \in [0, 1];$$

$$(8) f_n(x) = x^n - x^{2n}, x \in [0, 1];$$

$$(9) f_n(x) = x^n - x^{n+1}, x \in [0, 1];$$

$$(10) f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}, x \in (0, 1);$$

$$(12) f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, (I) x \in [-l, l]; (II) x \in (-\infty, +\infty).$$

【解】 (1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于 $|x|$.

(2) (I) 在 $(-l, l)$ 一致收敛于 0; (II) 在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛而不一致收敛.

(3) 在 $(0, 1)$ 收敛而不一致收敛.

(4) (I) 在 $[a, +\infty)$ 一致收敛; (II) 在 $(0, +\infty)$ 收敛而却不一致收敛.

(5) (I) 在 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 一致收敛于 0; (II) 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛.

(6) 在 $[0, 1]$ 内一致收敛于 x .

(8) 在 $[0, 1]$ 收敛而不一致收敛.

(9) 在 $[0, 1]$ 一致收敛于 0.

(10) 在 $(0, 1)$ 一致收敛于 0.

(12) (I) 在 $[-l, l]$ 一致收敛于 0; (II) $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不一致收敛.

2. 设 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $[a, b]$ 上有界, 并且 $|f_n(x)|$ 在 $[a, b]$ 一致收敛, 求证 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致有界.

【证明】 已知 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $[a, b]$ 有界, 则 $\exists M_n > 0, \forall x \in [a, b]$, 有 $|f_n(x)| \leq M_n$. 设 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 $f(x)$. 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall x \in [a, b]$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. 特别对 $\epsilon_0 = 1$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}^+, \forall x \in [a, b], |f_{N_0+1}(x) - f(x)| < \epsilon_0 = 1$, 从而 $|f(x)| \leq 1 + |f_{N_0+1}(x)| \leq 1 + M_{N_0+1}$. 所以 $\forall n > N_0, \forall x \in [a, b], |f_n(x)| < 1 + |f(x)| \leq 2 + M_{N_0+1}$. 取 $M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_{N_0}, 2 + M_{N_0+1}\}$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall x \in [a, b]$, 有 $|f_n(x)| \leq M$, 即 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致有界.

3. 设 $f(x)$ 定义于 (a, b) , 令 $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求证 $\{f_n(x)\}$ 在 (a, b) 一致收敛于 $f(x)$.

【证明】 由于 $\forall \epsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时, $\forall x \in (a, b)$ 有 $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{[nf(x)]}{n} - f(x)\right| = \frac{|[nf(x)] - nf(x)|}{n} \leq \frac{1}{n} < \epsilon$, 因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 一致收敛于 $f(x)$.

4. 见例 7-25. 5. 见例 7-55.

6. 问参数 a 取什么值时, $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 在闭区间 $[0, 1]$ 收敛? 在闭区间 $[0, 1]$ 一致收敛? 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限?

【解】 ① 当 $x = 0$ 时, $\forall a$, 均有 $f_n(x) = 0$; 当 $x \neq 0$ 且 $x \in (0, 1]$ 时,

$\forall \alpha$, 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha x}{e^{-nx}} = 0$. 因此, 对于任意 α , $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于函数 $f(x) = 0$.

② 由于 $f'_n(x) = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx)$, 故当 $x = \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) = 0$. 又由于当 $x < \frac{1}{n}$, $f'_n(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) < 0$; 故 $x = \frac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值点, 因此 $\rho_n = \sup_{x \in [0, 1]} [f_n(x) - 0] = \sup_{x \in [0, 1]} n^\alpha x e^{-nx} = n^{\alpha-1} e^{-1}$. 当 $\alpha < 1$ 且 $n \rightarrow \infty$ 时, $\rho_n \rightarrow 0$. 于是, 当 $\alpha > 1$, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 一致收敛于 0.

$$\textcircled{3} \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \int_0^1 x e^{-nx} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(-\frac{1}{n} e^{-n} - \frac{1}{n^2} e^{-n} + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-2} (1 - e^{-n} - n e^{-n}).$$

要使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$, 只要 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-2} (1 - e^{-n} - n e^{-n}) = 0$. 从而当 $\alpha < 2$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限.

7. 证明序列 $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) 在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛, 但

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

【证明】 当 $x = 0$ 时, $\forall n$, $f_n(x) = 0$; 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于 0. 由于 $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx e^{-nx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^1 e^{-nx^2} d(-nx^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-nx^2} \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} \right) (e^{-n} - 1) = \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

8. 设 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续, 且 $|f_n(x)|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛于 $f(x)$. 求证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续.

【证明】 由 $|f_n(x)|$ 一致收敛于 $f(x)$ 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 由 $f_{N+1}(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$, 有 $|f_{N+1}(x_1) - f_{N+1}(x_2)| < \varepsilon$. 于是有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f_{N+1}(x_1) + f_{N+1}(x_1) - f_{N+1}(x_2) + f_{N+1}(x_2) - f(x_2)|$$

$$\leq |f(x_1) - f_{N+1}(x_1)| + |f_{N+1}(x_1) - f_{N+1}(x_2)| + |f_{N+1}(x_2) - f(x_2)| \\ < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

9. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数列, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 $f(x)$; 又 $x_n \in [a, b] (n = 1, 2, \dots)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.

【证明】 由于 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 $f(x)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, \forall x \in [a, b]$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 又 $x_n \in [a, b]$ 且 $x_n \rightarrow x_0$, 故 $x_0 \in [a, b]$. 于是 $f_n(x)$ 在 x_0 连续, 由海涅定理知对上述任意的 $\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $|f_n(x_n) - f_n(x_0)| < \varepsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N$, 有 $|f_n(x_n) - f(x_0)| = |f_n(x_n) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

§2 函数项级数的一致收敛性及其判别法

1. 求出下列函数项级数的收敛区域(绝对的和条件的):

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+a^{2n}x^2}.$$

【解】 (1) 当 $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 原函数绝对收敛.

(2) 在 $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 绝对收敛.

(4) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 若 $|a| > 1$, 则原函数绝对收敛; 当 $|a| \leq 1$ 时, 原函数发散.

3. 讨论下列函数项级数的一致收敛性: ((7) 小题见例 7-26)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2}, \quad x \in [0, +\infty);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x + 2^n}, \quad x \in (-2, +\infty);$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln^n}{n!}, x \in [0, 1];$$

$$(9) \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{(n-1)^2}} \right], x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}, |x| \geq r > 1;$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, x \in [a, +\infty), a > 1.$$

【解】 (1) $\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}, \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 由

M-判别法知, 原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(2) $\left| \frac{x}{1+n^4 x^2} \right| = \frac{1}{2n^2} \frac{|2n^2 x|}{1+n^4 x^2} \leq \frac{1}{2n^2} \frac{1+n^4 x^2}{1+n^4 x^2} = \frac{1}{2n^2}, \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 由 M-判别法知, 原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(3) $\left| \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2} \right| = \frac{1 - e^{-nx}}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in [0, +\infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以原级数在 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

(4) 当 $n > 10$ 时, $\left| \frac{\sin nx}{x + 2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}, \forall x \in (-2, +\infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 所以原级数在 $(-2, +\infty)$ 一致收敛.

(5) $\left| \frac{nx}{1+n^5 x^2} \right| = \left| \frac{1}{2n^{\frac{5}{2}}} \frac{2n^{\frac{5}{2}} x}{1+n^5 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{5}{2}}} \frac{2n^{\frac{5}{2}} x}{1+n^5 x^2} = \frac{1}{2n^{\frac{5}{2}}}, \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{5}{2}}}$ 收敛, 于是原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(6) $\left| \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \right| \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \cdot 2 \cdot 2^n = \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}, \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$. 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{n^2 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = 0$, 由比值判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ 收敛. 于是原级数当 $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$ 一致收敛.

(8) 设 $a_n(x) = x^n \ln^n x$, 则 $|a_n(x)| = |x^n \ln^n x|$, $x \in [0, 1]$. 由 $(x \ln x)' = \ln x + 1 = 0$, 可得 $x = \frac{1}{e}$, 从而 $|x \ln x| \leq \frac{1}{e}$, 于是, $\forall n, \forall x \in [0, 1]$, 有 $|a_n(x)| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n \leq \frac{1}{e}$, 且易见每个 $x \in [0, 1]$, $|a_n(x)|$ 是单调下降数列. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛, 当然在 $[0, 1]$ 一致收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x^n \ln^n x|}{n!}$ 在 $[0, 1]$ 一致收敛, 由柯西原理得, 原级数在 $[0, 1]$ 一致收敛.

$$\begin{aligned}
 (9) \text{ 由于 } \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{(n-1)^2}} \right| &= \frac{\left| \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{(n-1)^2}\right) \right|}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{(n-1)^2}}} \\
 &= \frac{\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{(n-1)^2}}} \\
 &\leq \frac{\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}}{2 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{2n-1}{2n(n-1)^2} < \frac{1}{(n-1)^2}
 \end{aligned}$$

对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 均成立, 而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{(n-1)^2}} \right|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛, 从而原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(10) 由于 $\left| \frac{n}{x^n} \right| \leq \frac{n}{r^n}$, $|x| \geq r > 1$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{r^n}} = \frac{1}{r} < 1$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^n}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ 在 $|x| \geq r > 1$ 一致收敛.

(11) 由于 $\left| \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \right| = \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \leq \frac{nx}{nx^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{1}{a^{n-1}}$, $\forall x \in [a, +\infty)$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n-1}}$ 当 $a > 1$ 时收敛, 由 M -判别法知原级数在 $[a, +\infty)$ ($a > 1$) 一致收敛.

4. 讨论下列函数项级数的一致收敛性: ((2) 小题见例 7-26)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}, x \in (-1, +\infty);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin \frac{1}{3^n x}, x \in (0, +\infty);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}, |x| \leq a.$$

【解】 (1) $\left\{ \sum_{k=1}^n \cos \frac{2kx}{3} \right\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致有界, 且 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \right\}$ 单调下降一致趋于 0. 由狄利克雷判别法知, 原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(3) 由于 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 的部分和一致有界, 而 $\left| \frac{1}{n+x} \right| \leq \frac{1}{n-1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 且对每个固定的 $x \in (-1, +\infty)$, $\left\{ \frac{1}{n+x} \right\}$ 单调下降. 于是 $\left\{ \frac{1}{n+x} \right\}$ 单调一致趋于 0. 由狄利克雷判别法知, 原级数在 $(-1, +\infty)$ 一致收敛.

(4) 由于 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 的部分和一致有界. 而对每个固定的 $x \in (-\infty, +\infty)$, $\left\{ \frac{1}{n+\sin x} \right\}$ 当 $n \geq 2$ 单调下降, 且 $\left| \frac{1}{n+\sin x} \right| \leq \frac{1}{n-1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 于是 $\left\{ \frac{1}{n+\sin x} \right\}$ 单调一致趋于 0, 由狄利克雷判别法知, 原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(5) 取 $\varepsilon_0 = 1$, $\forall n$, 取 $x_n = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{2}{\pi} > 0$, 则 $|u_n(x_n) - 0| = 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 2^n \geq 2 > 1 = \varepsilon_0$, 即 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛于 0. 所以原函数不一致收敛.

(6) 由于 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \right| = |-1-1+1+1-\cdots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}| \leq 2$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 的部分和一致有界. 又 $\forall x \in [-a, a]$, $\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} \right\}$ 单调

下降, 且 $\frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + e^x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow 0, |x| \leq a$, 所以 $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + e^x}} \right\}$ 单调一致趋于 0, 因此由狄利克雷判别法知, 原级数一致收敛.

5. 见例 7-29.

6. 设每一项 $\varphi_n(x)$ 都是 $[a, b]$ 上的单调函数, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 的端点为绝对收敛, 那么这级数在 $[a, b]$ 一致收敛.

【证明】 由假设 $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a)|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(b)|$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} [|\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|]$ 收敛, 又由 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 单调, 故 $|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|, \forall x \in [a, b]$. 由比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 绝对收敛; 由 M -判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

7. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项 $|u_n(x)| \leq c_n(x), x \in X$, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ 在 X 一致收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上也一致收敛且绝对收敛.

【证明】 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ 在 X 一致收敛, 由柯西原理, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, $\forall p \in \mathbb{N}^+, \forall x \in X$, 都有 $\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x) \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x) \right| < \epsilon$. 由于 $|u_n(x)| \leq c_n(x), x \in X$, 从而 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x) < \epsilon$, 由柯西原理, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 也一致收敛且绝对收敛.

§3 和函数的分析性质

1. 研究下列级数所表示的函数在指定区间上的连续性:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} x^n, -1 < x < 1; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, -1 \leq x < 1;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, |x| \leq 1;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, 0 < x < +\infty;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x^2}, |x| > 0;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, |x| > 0;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4 x^2}, |x| > 0;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, |x| < \infty.$$

【解】 (1) 因为 $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) = \frac{1}{1-x}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 在 $(-1, 1)$ 连续.

(2) $\forall x_0 \in [-1, 1)$, 在 $\left[-1, \frac{1+x_0}{2}\right]$ 上, 由于 $\left|\sum_{k=1}^n x^k\right| = |x + x^2 + \cdots + x^n| = \left|\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \max\left\{1, \frac{1+x_0}{2-x_0}\right\}$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的部分和在 $\left[-1, \frac{1+x_0}{2}\right]$ 一致有界, 而 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时关于 $x \in \left[-1, \frac{1+x_0}{2}\right]$ 单调一致趋于 0, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在 $\left[-1, \frac{1+x_0}{2}\right]$ 一致收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在 $x = x_0$ 连续, 由 x_0 的任意性, 原级数在 $[-1, 1)$ 连续.

(3) $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由 M-判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1, 1]$ 一致收敛, 又 $\forall n$, $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$ 在 $[-1, 1]$ 连续, 故原级数在 $[-1, 1]$ 连续.

(4) $\left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in (0, +\infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由 M-判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 一致收敛. 又 $\forall n$, $u_n(x) = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 连续, 故原级数在 $(0, +\infty)$ 连续.

(5) $\forall x_0 \neq 0$, 不妨设 $x_0 > 0$. 在 $\left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$ 上, $\left|\frac{1}{1+n^2 x^2}\right| \leq \frac{4}{4+n^2 x_0^2}$, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4+n^2 x_0^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x^2}$ 在 $\left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$ 一致收敛.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ 在 $x = x_0$ 连续, 由 x_0 的任意性知, 原级数当 $|x| > 0$ 时连续.

(6) $\left| \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \forall x: |x| < \infty$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 由 M -判别法知,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $|x| < \infty$ 一致收敛, 又 $\forall n, u_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $|x| < \infty$ 连续, 故原级数当 $|x| < \infty$ 时连续.

(7) $\forall x_0 \neq 0$, 不妨设 $x_0 > 0$. 在 $\left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$ 上, $\left| \frac{nx}{1+n^4x^2} \right| = \frac{x}{\frac{1}{n} + n^3x^2} \leq \frac{x}{n^3x^2} = \frac{1}{n^3x} \leq \frac{2}{n^3x_0}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3x_0}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$ 在 $\left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$ 一致收敛. 又 $\forall n, u_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^2}$ 在 $\left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$ 连续, 特别地在 x_0 连续, 由 x_0 的任意性知, 原级数当 $|x| > 0$ 时连续.

(8) 由于 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = 1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$. 于是, $S(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.

2. 求证 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 并有连续导函数.

【证明】 由于 $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的收敛性, 根据 M -判别法, 原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛. 又 $\forall n, u_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 故 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续. 由于 $u'_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛, 根据函数项级数一致收敛的性质知, 上述级数的和在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 且有 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

3. 见例 7-56. 4. 参考例 7-22.

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 一致收敛, $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 连续,

求证

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛;

(2) $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

【证明】 (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 一致收敛, 由柯西原理, $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}^+$, $\forall x \in (a, b)$, 有 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

由于 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $[a, b]$ 连续, 特别地, 在 $x = a$, $x = b$ 点连续,

在上式中分别令 $x \rightarrow a$, $x \rightarrow b$ 得, $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(a) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(b) \right| \leq$

$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}^+$, $\forall x \in [a, b]$, 有

$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

(2) 由(1)知, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛, 又 $\forall n$, $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 连

续, 于是根据和函数的连续性知, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

【证明】 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛, 而 $\forall x \in [0$,

$\infty)$, $\left\{ \frac{1}{n^x} \right\}$ 单调下降且 $\left| \frac{1}{n^x} \right| \leq 1$, 即 $\left\{ \frac{1}{n^x} \right\}$ 单调一致有界, 由阿贝尔判别法知,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛. 而 $\forall n$, $\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0, \infty)$ 连续, 所以 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$

在 $[0, \infty)$ 连续, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. 见例 7-11(2).

第十三章 幂级数

§ 1 幂级数的收敛半径与收敛区域

1. 求下列各幂级数的收敛域: ((2) 小题见例 7-31, (3) 小题见例 7-58, (6) 小题见例 7-32)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} x^n;$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}} x^n;$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n + 7^n};$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n; \quad (13) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n;$$

$$(14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$(15) \sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n (0 < a < 1).$$

解 (1) $(-\infty, +\infty)$. (4) $[-1, 1]$. (8) $(-e, e)$. (9) $(-1, 1]$.
 (10) $(-7, 7)$. (11) $(-4, 4)$. (12) $(-1, 1)$. (13) $[-1, 1)$.
 (14) $(-\infty, \infty)$. (15) $(-\infty, \infty)$.

2. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 收敛半径为 Q . 讨论下列级数的收敛半径:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n.$$

【解】 (1) 由条件知, 当 $x^2 < R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 收敛; 当 $x^2 > R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 发散. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 \sqrt{R} .

$$(2) \text{ 若 } R = Q, \text{ 则当 } |x| < Q \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

收敛; 当 $|x| > Q$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 都发散, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 可能收敛也可能发散. 所以这时 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径可以是 $[Q, +\infty)$ 内的一切值. 若 $R \neq Q$, 不妨设 $R > Q$, 则当 $|x| < Q$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 收敛. 当 $R > |x| > Q$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 发散, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 发散. 由阿贝尔第一定理知, 当 $|x| > Q$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 发散. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 Q . 综上所述, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径 $\geq \min\{P, Q\}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$ 的收敛半径 $\geq RQ$.

3. 设 $\left| \sum_{k=0}^n a_k x_1^k \right| \leq M (n = 0, 1, 2, \dots; x_1 > 0)$, 求证当 $0 < x < x_1$ 时, 有

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛;

(2) $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \leq M$.

【证明】 (1) 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n \cdot \left(\frac{x}{x_1}\right)^n$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 的部分和有界, 且 $\left\{\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right\}$ 单调下降趋于 0. 于是由狄利克雷判别法知其收敛.

(2) 由于 $\forall n$, 都有 $\left| \sum_{k=0}^n a_k x_1^k \right| \leq M$, 故 $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \leq M$.

§2 幂级数的性质

1. 见例 7-57. 2. 见例 7-61.

3. 用逐项微分或逐项积分求下列级数的和: ((5) 小题见例 7-59, (7) 小题

见例 7-60, (9) 小题见例 7-33)

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n.$$

【解】 (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad -1 \leq x < 1.$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n = -\frac{1}{x} + e^{-x} \left(\frac{1}{x} + 1 + x^2 \right), \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0; \text{ 当 } x = 0 \text{ 时, 原级数为 } 0.$$

第十四章 傅里叶级数

§ 1 三角级数与傅里叶级数

2. (3) 见例 7-43. (8) 见例 7-40. 3. 见例 7-42.

第十五章 多元函数的极限与连续性

§ 1 平面点集

1. 见例 5-1. 2. 见例 5-2.

3. 判别下列平面点集哪些是开集、闭集、有界集或区域, 并分别指出它们的聚点: ((1) (3) (5) (7) 小题见例 5-3)

$$(2) E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}; \quad (4) E = \{(x, y) \mid xy = 0\};$$

$$(6) E = \left\{ (x, y) \mid y = \sin \frac{1}{x}, x > 0 \right\};$$

$$(8) E = \{(x, y) \mid x, y \text{ 均为整数}\}.$$

【解】 (2) 开集, 聚点: \mathbb{R}^2 . (4) 闭集, 聚点: $\{(x, y) \mid xy = 0\}$.

(6) 聚点: $\left\{ (x, y) \mid y = \sin \frac{1}{x}, x > 0 \text{ 或 } x = 0, |y| \leq 1 \right\}$. (8) 闭集、聚点: \emptyset .

4. 见例 5-4. 5. 见例 5-4. 6. 见例 5-6. 7. 见例 5-7.
8. 见例 5-8. 9. 见例 5-9.

§2 多元函数的极限与连续性

1. 见例 5-10.

2. 求下列极限(包括非正常极限): ((1)(2)(3)(4)(5)(7)(13)(14) 小题见例 5-11)

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^x + e^y}{\cos x - \sin y} = 2; \text{ (提示: 直接代入)}$$

$$(8) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x} = 2 \text{ (提示: 等价无穷小替换)}$$

$$(9) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln 2; \text{ (提示: 直接代入)}$$

(10) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{1}{2x - y} = \infty$; (提示: 先求其倒数的极限, 再利用无穷小和无穷大的关系来计算)

$$(11) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy + 1}{x^4 + y^4} = +\infty; \text{ (提示: 同上)}$$

$$(12) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = +\infty; \text{ (提示: 同上).}$$

3. 讨论下列函数在点(0, 0)的全面极限和两个累次极限: ((1)(2)(3) 小题见例 5-12)

$$(4) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2};$$

$$(5) f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y};$$

$$(6) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3};$$

$$(7) f(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$(8) f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}.$$

【解】 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1, \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \text{ 不存在.}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

4. 见例 5-13. 5. 见例 5-14.

6. 试作出函数 $f(x, y)$, 使当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时,

(1) 全面极限和两个累次极限都不存在;

(2) 全面极限不存在, 两个累次极限存在但不相等;

(3) 全面极限和两个累次极限都存在.

【解】 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$. (1) 取 $f(x, y) = \sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{y}$; (2) 取

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}; (3) \text{ 取 } f(x, y) = xy.$$

7. 讨论下列函数的连续范围: ((5)(6)(9) 小题见例 5-15)

$$(1) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(2) f(x, y) = \frac{1}{\sin x \sin y};$$

$$(3) f(x, y) = [x + y];$$

$$(4) f(x, y) = \frac{x + y}{x^3 + y^3};$$

$$(7) f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数} \\ y, & x \text{ 为有理数} \end{cases};$$

$$(8) f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

【解】 (1) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$. (2) $\{(x, y) \mid x \neq m\pi, y \neq k\pi, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$.

(3) $\{(x, y) \mid x + y \in \mathbb{N}\}$. (4) $\{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$.

(7) $\{(x, y) \mid y = 0\}$. (8) \mathbb{R}^2 .

8. 见例 5-16. 9. 见例 5-17. 10. 见例 5-18. 11. 见例 5-19.

12. 见例 5-20.

第十六章 偏导数与全微分

§1 偏导数与全微分的概念

1. 求下列函数的偏导数: ((5)(6) 小题见例 5-21)

(1) $u = x^2 \ln(x^2 + y^2)$; (2) $u = (x + y) \cos(xy)$;

(3) $u = \arctan \frac{y}{x}$; (4) $u = xy + \frac{x}{y}$.

【解】 (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$;

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(xy) - y(x + y) \sin(xy)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(xy) - x(x + y) \sin(xy)$;

(3) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

(4) $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$.

2. 见例 5-22. 3. 见例 5-23.

4. 求下列函数的全微分:

(1) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; (2) $u = xe^{yz} + e^{-x} + y$.

【解】 (1) $du = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

(2) $du = (e^{yz} - e^{-x}) dx + (xze^{yz} + 1) dy + xye^{yz} dz$.

5. 求下列函数在给定点的全微分:

(1) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在点(1, 0)和(0, -1);

(2) $u = \ln(x + y^2)$ 在点(0, 1)和(1, 1);

(3) $u = \sqrt{\frac{x}{y}}$ 在点(1, 1, 1);

(4) $u = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$ 在点(0, 1).

【解】 (1) $du|_{(1,0)} = 0$, $du|_{(0,1)} = dx$;

(2) $du|_{(0,1)} = dx + 2dy$, $du|_{(1,1)} = \frac{dx}{2} + dy$;

$$(3) du|_{(1,1,1)} = dx - dy; \quad (4) du|_{(0,1)} = dx.$$

6. 见例 5-24. 7. 见例 5-25. 8. 见例 5-18. 9. 见例 5-27.

11. 见例 5-28. 12. 见例 5-29. 13. 见例 5-30.

16. 求下列函数指定阶的偏导数: ((4)(5) 小题见例 5-31)

$$(1) u = x^3 \sin y + y^3 \sin x, \text{ 求 } \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3};$$

$$(2) u = \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \text{ 求所有三阶偏导数};$$

$$(3) u = \sin(x^2 + y^2), \text{ 求 } \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3};$$

$$(6) u = \ln(ax + by), \text{ 求 } \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}.$$

$$\text{【解】} (1) \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6(\cos x + \cos y).$$

$$(2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{6y^2 - 2}{(1+y^2)^3}.$$

$$(3) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -4x[2x^2 \cos(x^2 + y^2) + 3\sin(x^2 + y^2)].$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -4y[2y^2 \cos(x^2 + y^2) + 3\sin(x^2 + y^2)].$$

$$(6) \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = (-1)^{m+n-1} \frac{a^m b^n (m+n-1)!}{(ax+by)^{m+n}}.$$

17. 验证下列函数满足: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. ((1) 小题见例 5-32)

$$(2) u = x^2 - y^2; \quad (3) u = e^x \cos y; \quad (4) u = \arctan \frac{y}{x}.$$

$$\text{【证明】} (2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$(3) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$(4) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

18. 见例 5-33.

§2 复合函数与隐函数微分法

1. 求下列函数的所有二阶偏导数: ((2)(4) 小题见例 5-34)

$$(1) u = f(ax, by); \quad (3) u = f(xy^2, x^2y);$$

$$(5) u = f(x^2 + y^2 + z^2);$$

$$(6) u = f\left(x + y, xy, \frac{x}{y}\right).$$

【解】 (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = af_1, \frac{\partial u}{\partial y} = bf_2, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 f_{11}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 f_{22}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = abf_{12}.$

$$(3) \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 f_1 + 2xyf_2, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyf_1 + x^2 f_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^4 f_{11} + 2xy^3 f_{12} + 2xy^3 f_{21} + 4x^2 y^2 f_{22} + 2yf_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2xf_1 + 4x^2 y^2 f_{11} + 2x^3 y f_{12} + 2x^3 y f_{21} + x^4 f_{22},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yf_1 + 2xy^3 f_{11} + x^2 y^2 f_{12} + 2xf_2 + 4x^2 y^2 f_{21} + 2x^3 y f_{22}.$$

$$(5) \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial u}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial u}{\partial z} = 2zf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f''(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xyf''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2f''(x^2 + y^2 + z^2) + 4y^2 f''(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 4yzf''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2f''(x^2 + y^2 + z^2) + 4z^2 f''(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 4xzf''(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$(6) \frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + yf_2 + \frac{1}{y}f_3, \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 + xf_2 - \frac{x}{y^2}f_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11} + 2yf_{12} + \frac{2}{y}f_{13} + y^2 f_{22} + 2f_{23} + \frac{1}{y^2}f_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{11} + 2xf_{12} - \frac{2x}{y^2}f_{13} + x^2 f_{22} - \frac{2x^2}{y^2}f_{23} + \frac{2x}{y^3}f_3 + \frac{x^2}{y^4}f_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11} + (x + y)f_{12} + \frac{y - x}{y^2}f_{13} + f_2 + xyf_{22} - \frac{1}{y^2}f_{23} - \frac{x}{y^3}f_{33}.$$

2. 见例 5-35. 3. 见例 5-36. 4. 见例 5-37.

5. 验证下列各式: ((3)(4) 小题见例 5-38)

$$(1) u = \varphi(x^2 + y^2), \text{ 则 } y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(2) u = y\varphi(x^2 - y^2), \text{ 则 } y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xu}{y}.$$

【解】 (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\varphi'$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\varphi'$, 所以 $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy\varphi' - 2yx\varphi' =$

0.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\varphi'$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi - 2y^2\varphi'$, $\varphi = \frac{u}{y}$.

所以 $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy^2\varphi' + x\varphi - 2xy^2\varphi' = x\varphi = \frac{xu}{y}$.

6. 见例 5-39. 7. 见例 5-40. 8. 见例 5-41. 9. 见例 5-42.

10. 见例 5-43.

11. 求下列方程所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的一阶和二阶偏导数: ((1) 小题见例 5-44)

(2) $x + y + z = e^{x+y+z}$; (3) $xyz = x + y + z$;

(4) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 5 = 0$.

【解】 (2) $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz-1}{1-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz-1}{1-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y(yz-1)}{(1-xy)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x(xz-1)}{(1-xy)^2}$,
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x-y+z+xyz}{(1-xy)^2}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{2-z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y+1}{2-z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2-z)^2 + (x-1)^2}{(2-z)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(2-z)^2 + (y+1)^2}{(2-z)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x-1)(y+1)}{(2-z)^3}$.

12. 求下列方程所确定的全微分 dz : ((1)(3) 小题见例 5-45)

(2) $F(x-y, y-z, z-x) = 0$; (4) $f(x, y) + g(y, z) = 0$.

【解】 (2) $dz = \frac{(F_3 - F_1)dx + (F_1 - F_2)dy}{F_3 - F_2}$.

(4) $dz = -\frac{f_x dx + (f_y + g_y)dy}{g_z}$.

13. 见例 5-46. 14. 见例 5-47. 15. 见例 5-82. 16. 求下列方程组所确定的函数的导数或偏导数: ((4) 小题见例 5-48)

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$;

(2) $\begin{cases} x - u^2 - yv = 0, \\ y - v^2 - xu = ax, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$;

$$(3) \begin{cases} u^2 - v = 3x + y, \\ u - 2v^2 = x - 2y, \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

【解】 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{a-2x}{2y}, \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{2x}.$

$$(2) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2v+uy}{4uv-xy}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u^2+x}{xy-4uv}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y+2v^2}{xy-4uv}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u+xv}{4uv-xy}.$$

$$(3) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{12v-1}{8uv-1}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3-2u}{8uv-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4u+2}{8uv-1}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4u+1}{8uv-1}.$$

17. 下面方程组定义了 z 为 x, y 的函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$. ((2) 小题见例 5-49)

$$(1) \begin{cases} x = \cos\theta\cos\varphi, \\ y = \cos\theta\sin\varphi, \\ z = \sin\theta. \end{cases}$$

【解】 (1) 对方程组 $\begin{cases} x = \cos\theta\cos\varphi \\ y = \cos\theta\sin\varphi \end{cases}$ 关于 x 求偏导, 得

$$\begin{cases} 1 = -\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial\theta}{\partial x} - \cos\theta\sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0 = -\sin\theta\sin\varphi \frac{\partial\theta}{\partial x} + \cos\theta\cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$

同理, 对方程组 $\begin{cases} x = \cos\theta\cos\varphi \\ y = \cos\theta\sin\varphi \end{cases}$ 关于 y 求偏导, 得

$$\begin{cases} 0 = -\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial\theta}{\partial y} - \cos\theta\sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 1 = -\sin\theta\sin\varphi \frac{\partial\theta}{\partial y} + \cos\theta\cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$

故 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial x} = \cos\theta \cdot \frac{-\cos\varphi}{\sin\theta} = -\cot\theta\cos\varphi,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial y} = \cos\theta \cdot \frac{-\sin\varphi}{\sin\theta} = -\cot\theta\sin\varphi.$$

§ 3 几何应用

1. 求下列曲线所示点处的切线方程和法平面方程: ((1)(3) 小题见例 5-63)

(2) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9, z^2 = 3x^2 + y^2$, 在点 $(1, -1, 2)$;

(4) $x = t - \cos t, y = 3 + \sin^2 t, z = 1 + \cos 3t$, 在点 $t = \frac{\pi}{2}$.

【解】 (2) 切线方程 $\frac{x-1}{8} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-2}{7}$;

法平面方程 $8(x-1) + 10(y+1) + 7(z-2) = 0$.

(4) 切线方程为 $\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-1}{3}$, 法平面方程 $2x + 3z - 3 - \pi = 0$.

2. 求下列曲面在所示点处的切平面方程和法线方程: ((1)(2) 小题见例 5-64)

(3) $z = 2x^2 + 4y^2$, 在点 $(2, 1, 12)$;

(4) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$, 在点 $P_0(u_0, v_0)$.

【解】 (3) 切平面方程 $8x + 8y - z - 12 = 0$; 法线方程 $\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-12}{-1}$.

(4) 法线方程 $\frac{x - u_0 \cos v_0}{a \sin v_0} = \frac{y - u_0 \sin v_0}{-a \cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0}$,

切平面方程 $(a \sin v_0)x - (a \cos v_0)y + u_0 z = au_0 v_0$.

3. 见例 5-65. 4. 见例 5-66. 5. 见例 5-67. 6. 见例 5-68.

7. 见例 5-69.

§4 方向导数

1. 设 $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$, 求 f 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 沿方向 $l = (2, -2, 1)$ 的方向导数.

【解】 $\frac{\partial f}{\partial l} = (1, 2, 3) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$.

2. 求函数 $u = xyz$ 在点 $A(5, 1, 2)$ 处沿到点 $B(9, 4, 14)$ 的方向 \overrightarrow{AB} 上的导数.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{98}{13}, l = \overrightarrow{AB}$.

3. 求 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)}$:

(1) $u = \ln(x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, l 与 x 轴正向的夹角为 60° ;

(2) $u = xe^{xy}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, l 与向量 $(1, 1)$ 同向.

【解】 (1) $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (在第一象限), $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (在第四象限);

(2) $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e$.

4. 设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 单位向量 $l_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $l_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l_1} = 1$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l_2} = 0$, 确定 l , 使得 $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$.

【解】 设 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \Big|_{(x_0, y_0)} = (a, b)$, 则由已知

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = 1 \\ -\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ 设 } l \text{ 的方向余弦为 } (u, v), \text{ 则有:}$$

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v = \frac{7}{5\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{4}{5} \\ v_1 = \frac{3}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} u_2 = \frac{3}{5} \\ v_2 = \frac{4}{5} \end{cases}, \text{ 所以 } l \text{ 的方向为 } l_1 =$$

$$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ 或 } l_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

5. 设 f 在 $P_0(2, 0)$ 可微, $f(x, y)$ 在 P_0 指向 $P_1(2, -2)$ 的方向导数是 1, 指向原点的方向导数是 -3, 试回答:

(1) 指向 $P_2(2, 1)$ 的方向导数是多少?

(2) 指向 $P_3(3, 2)$ 的方向导数是多少?

【解】 (1) $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{P_0P_2}} \Big|_{(2,0)} = -1$; (2) $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{P_0P_3}} \Big|_{(2,0)} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

第十七章 隐函数存在定理

§1 单个方程的情形

2. 见例 5-50. 3. 见例 5-51. 5. 见例 5-52. 6. 见例 5-53.

7. 见例 5-54.

§ 2 方程组的情形

1. 见例 5-55. 2. 见例 5-56. 3. 见例 5-57. 4. 见例 5-58.

5. 见例 5-59. 6. 见例 5-60. 8. 见例 5-61. 10. 见例 5-62.

第十八章 极值与条件极值

§ 1 极值与最小二乘法

1. 求下列函数的极大值和极小值点: ((1)(2)(5) 小题见例 5-70)

$$(3) f(x, y) = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} (a, b > 0);$$

$$(4) f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y);$$

$$(6) f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2.$$

【解】 (3) 极小值点 $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 和 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, 极大值点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 和 $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

$$(4) \text{极小值点} \left(\frac{1}{2}, -1\right).$$

$$(6) \text{极小值点} \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

2. 见例 5-71.

4. 求下列函数在指定范围 D 内的最大值和最小值: ((1) 小题见例 5-72)

$$(2) f(x, y) = x^2 - xy + y^2, D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\};$$

$$(3) f(x, y, z) = (ax + by + cz)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}, \text{ 其中 } a^2 + b^2 + c^2 > 0, D = \mathbb{R}^3.$$

【解】 (2) 函数 f 在 $(0, \pm 1)$ 和 $(\pm 1, 0)$ 处有最大值 1, 在 $(0, 0)$ 处有最小值 0.

$$\begin{aligned} (3) \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |f(x,y)| &= f\left(\frac{a}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{2e}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |f(x,y)| &= f\left(\frac{-a}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}, \frac{-b}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}, \frac{-c}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{2e}}; \end{aligned}$$

5. 见例 5-73.

7. 求下列隐函数的极大值和极小值:

$$(1) (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 3;$$

$$(2) z^2 + xyz - x^2 - xy^2 - 9 = 0.$$

【解】 (1) 极大值为 $\frac{3}{2}$, 极小值为 $-\frac{3}{2}$. (2) 极大值为 3, 极小值为 -3.

8. 见例 5-74.

§2 条件极值与拉格朗日乘数法

1. 求下列函数在所给条件下的极值: ((1)(2)(3) 小题见例 5-75)

$$(4) f = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ 若 } x + y = 2;$$

$$(5) f = xyz, \text{ 若 } x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0;$$

【解】 (4) 在 (1, 1) 处取极小值.

(5) 在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 处取极小值, 在 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 处取极大值.

2. 见例 5-76.

3. 求函数 $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ 在条件 $x + y = l (l > 0, n \geq 1)$ 之下的极值.

【解】 $z = f(x, y)$ 在条件 $x + y = l$ 下有极小值: $f\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) = \left(\frac{l}{2}\right)^n$.

4. 求表面积一定而体积最大的长方形.

【解】 当长方体的长宽高都为表面积的 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 倍时体积最大.

5. 求体积一定而表面积最小的长方形.

【解】 设长方体的体积为 V , 则当长宽高都为 $V^{\frac{1}{3}}$ 时, 表面积最小.

7. 见例 5-77.

8. 求原点到二平面 $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ 的交线的最短距离.

【解】 当

$$x = \frac{-b_1^2a_2d_2 + b_1b_2(d_1a_2 + a_1d_2) + c_1a_1(d_1c_2 - c_1d_2) - a_1[d_1(b_2^2 + c_2^2) - c_1c_2d_2]}{c_1^2(a_2^2 + b_2^2) - 2a_1c_1a_2c_2 - 2b_1b_2(a_1a_2 + c_1c_2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2) + a_1^2(b_2^2 + c_2^2)},$$

$$y = \frac{b_1[(a_1a_2 + c_1c_2)d_2 - (a_2^2 + c_2^2)d_1] + b_2[a_1d_1a_2 - a_1^2d_2 + c_1(d_1c_2 - c_1d_2)]}{c_1^2(a_2^2 + b_2^2) - 2a_1c_1a_2c_2 - 2b_1b_2(a_1a_2 + c_1c_2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2) + a_1^2(b_2^2 + c_2^2)},$$

$$z = \frac{c_1[(a_1a_2 + b_1b_2)d_2 - (a_2^2 + b_2^2)d_1] + c_2[a_1d_1a_2 - a_1^2d_2 + b_1(d_1b_2 - b_1d_2)]}{c_1^2(a_2^2 + b_2^2) - 2a_1c_1a_2c_2 - 2b_1b_2(a_1a_2 + c_1c_2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2) + a_1^2(b_2^2 + c_2^2)}$$

时, 到原点的距离最短, 最短距离为:

$$\sqrt{\frac{d_1(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - 2d_1d_2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + d_2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}{c_1^2(a_2^2 + b_2^2) - 2a_1c_1a_2c_2 - 2b_1b_2(a_1a_2 + c_1c_2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2) + a_1^2(b_2^2 + c_2^2)}}.$$

9. 求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y = 1$ 间的最短距离.

【解】 最短距离为 $\frac{9}{32}$, 对应的抛物线上的点是 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

10. 求 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 时函数 $f(x, y, z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的极大值.

【解】 当 $x = r$, $y = \sqrt{2}r$, $z = \sqrt{3}r$ 时, 函数 f 取极大值, $f_{\max} = 6\ln r + \ln 6\sqrt{3}$.

第十九章 含参变量的积分

§1 含参变量的正常积分

1. 求下列极限: ((1)(3) 小题见例 8-15)

(2) $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos ax \, dx$.

【解】 因 $x^2 \cos ax$ 是连续函数, 故 $F(a) = \int_0^2 x^2 \cos ax dx$ 是 $-\infty < a < +\infty$ 上的连续函数, 故 $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos ax dx = \lim_{a \rightarrow 0} F(a) = F(0) = \frac{8}{3}$.

2. ((2) 小题见例 8-16).

4. 研究函数 $F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$ 的连续性, 其中 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续且为正的函数.

【解】 当 $y \neq 0$ 时, 被积函数是连续的, 因此, $F(y)$ 为连续函数; 当 $y = 0$ 时, $F(0) = 0$; 当 $y > 0$ 时, 设 m 为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值, 则 $m > 0$, 由于

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx \geq m \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = m \arctan \frac{1}{y} \quad \text{及} \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} F(y) = \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2},$$

故有 $\lim_{y \rightarrow 0^+} F(y) \geq \frac{m\pi}{2} > 0$, 于是, $F(y)$ 在 $y = 0$ 不连续.

5. 应用积分号下求导法求下列积分: ((1)(4) 小题见例 8-18)

$$(2) \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx \quad (|a| < 1);$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx \quad (a, b \neq 0).$$

【解】 (2) 当 $|a| < 1$ 时, 由于 $1 - 2a \cos x + a^2 \geq 1 - 2|a| + a^2 = (1 - |a|)^2 > 0$, 故 $\ln(1 - 2a \cos x + a^2)$ 为连续函数且具有连续导数, 从而可在积分号下求导数, 有

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^\pi \frac{2a - 2\cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(1 + \frac{a^2 - 1}{1 - 2a \cos x + a^2} \right) dx \quad \left(\text{令 } t = \tan \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{a^2 - 1}{a} \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + a^2) - 2a \cos x} \\ &= \frac{\pi}{a} + \frac{a^2 - 1}{a} \int_0^\infty \frac{2}{(1 - a)^2 + (1 + a)^2 t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \arctan \left(\frac{1 + a}{1 - a} t \right) \Big|_0^\infty = 0. \end{aligned}$$

于是 $I'(a) = 0$, 则 $I(a) = C$, 而 $I(0) = 0$, 故 $C = 0$, 从而

$$I(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = 0.$$

(3) 令 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$, 先设 $a > 0, b > 0$, 有

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx.$$

若 $a = b$, 有 $I'(b) = \frac{2}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2b}$;

若 $a \neq b$, 设 $t = \tan x$, 得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \tan^2 x}{a^2 \tan^2 x + b^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{2at^2}{a^2 t^2 + b^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{2a}{a^2 - b^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{b^2}{a^2 t^2 + b^2} \right) dt = \frac{\pi}{a+b}. \end{aligned}$$

从而 $I(a) = \pi \ln(a+b) + C$ ($a > 0$). 令 $a = b$, 得 $I(b) = \pi \ln 2b + C$, 而 $I(b)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln b^2 dx = \pi \ln b$, 于是 $C = \pi \ln \frac{1}{2}$, 从而 $I(a) = \pi \ln \frac{a+b}{2}$ ($a > 0$). 若 a

< 0 或 $b < 0$, 则可转化为 $a > 0$, 且 $b > 0$ 的情形, 得 $I(a) = \pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$.

综合可得, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx = \pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$.

6. 见例 8-19.

7. 设 $f(x)$ 为可微函数, 求下列函数的二阶导数: ((2) 小题见例 8-22)

$$(1) F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy.$$

【解】 (1) $F'(x) = 2xf(x) + \int_0^x f(y)dy$, 所以 $F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$;

8. 见例 8-21.

9. 设 $F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$, 问是否成立

$$F'(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{y=0} dx.$$

【解】 不成立. 事实上, 当 $y \neq 0$ 时,

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx = \ln \sqrt{1+y^2} - 1 + y \arctan \left(\frac{1}{y} \right), \quad F(0) =$$

$$\int_0^1 \ln x dx = -1. \text{ 由此可知, } F'_+(0) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sqrt{1+y^2} + y \arctan \left(\frac{1}{y} \right)}{y} = \frac{\pi}{2}.$$

同理可得, $F'_-(0) = -\frac{\pi}{2}$, 故 $F'(0)$ 不存在. 另一方面, 当 $x > 0$ 时,

$\left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2}\right) \Big|_{y=0} = 0$, 故 $\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2}\right) \Big|_{y=0} dx = 0$, 由此可知,

当 $y = 0$ 时, 不能在积分号下求导数.

10. 见例 8-23.

11. 设 $F(x)$ 为二次可微函数, $\varphi(x)$ 为可微函数, 证明函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(z) dz$$

满足弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及初始条件 $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$.

【证明】 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}[f'(x-at)(-a) + f'(x+at)a] + \frac{1}{2a}[\varphi(x+at)a - \varphi(x-at)(-a)]$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}[f''(x-at)a^2 + f''(x+at)a^2] + \frac{1}{2a}[\varphi'(x+at)a^2 - \varphi'(x-at)a^2]$,

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}[f'(x-at) \cdot 1 + f'(x+at) \cdot 1] + \frac{1}{2a}[\varphi(x+at) \cdot 1 - \varphi(x-at) \cdot 1]$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}[f''(x-at) + f''(x+at)] + \frac{1}{2a}[\varphi'(x+at) - \varphi'(x-at)]$,

故 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

另外, $u(x, 0) = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] + \frac{1}{2a} \int_x^x \varphi(z) dz = f(x)$,

$u_t(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}[-af'(x) + af'(x)] + \frac{1}{2a}[a\varphi(x) + a\varphi(x)] = \varphi(x)$.

§2 含参变量的广义积分

1. 证明下列积分在指定区间内一致收敛: ((4) 小题见例 8-26, (5) 小题见例 8-27)

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2 + y^2} dy \quad (x \geq a > 0);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1 + y^2} dy \quad (-\infty < x < +\infty).$$

【证明】 (1) $\left| \frac{\cos(xy)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{a^2 + y^2}, \forall y \in [0, +\infty), \forall x \in [a, +\infty)$,
而 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + y^2} dy$ 收敛, 因此 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2 + y^2} dy$ 在 $[a, +\infty)$ 一致收敛.

$$(2) \text{提示: } \left| \frac{\cos(xy)}{1 + y^2} \right| \leq \frac{1}{1 + y^2};$$

(3) $0 \leq y^x e^{-y} \leq y^b e^{-y} (a \leq x \leq b, y \geq 1)$, 由于 $\lim_{y \rightarrow \infty} y^2 \cdot y^b e^{-y} = 0$, 故
积分 $\int_1^{+\infty} y^b e^{-y} dy$ 收敛, 从而 $\int_1^{+\infty} y^x e^{-y} dy$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

2. 讨论下列积分在指定区间上的一致收敛性; ((1)(3) 小题见例 8-24)

$$(2) \int_0^{+\infty} x e^{-xy} dy, \quad (I) x \in [a, b] (a > 0), \quad (II) x \in [0, b];$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy \quad (0 < x < +\infty).$$

【解】 (2) (I) 因为 $\int_A^{+\infty} x e^{-xy} dy = -e^{-xy} \Big|_A^{+\infty} = e^{-xA} \leq e^{-aA}$, 而 $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-aA} = 0$, 所以 $\forall \epsilon > 0, \exists A_0 > 0$, 当 $A > A_0$ 时, 有 $e^{-aA} < \epsilon$, 从而当 $A > A_0$ 时, $\forall x \in [a, b]$, 有 $\left| \int_A^{+\infty} x e^{-xy} dy \right| \leq e^{-aA} < \epsilon$, 故 $\int_0^{+\infty} x e^{-xy} dy$ 在 $[a, b] (a > 0)$ 一致收敛;

(II) $\int_0^{+\infty} x e^{-xy} dy$ 在 $[0, b]$ 不一致收敛. 事实上, 要证 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall A_0 > 0, \exists A > A_0$ 和 $\exists x_0 \in [0, b]$, 使得 $\left| \int_A^{+\infty} x_0 e^{-x_0 y} dy \right| \geq \epsilon_0$, 从 $\int_A^{+\infty} x e^{-xy} dy = e^{-xA}$ 知, 只要取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2e}$, $\forall A_0 > 0$, 取 $A = A_0 + \frac{1}{b}, x_0 = \frac{1}{A} = \frac{1}{A_0 + \frac{1}{b}} \in [0, b]$, 就有 $\int_A^{+\infty} x_0 e^{-x_0 y} dy = e^{-1} > \epsilon_0$, 因此 $\int_0^{+\infty} x e^{-xy} dy$ 在 $[0, b]$ 不一致收敛.

(4) 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy$ 对任意固定的 x 都是收敛的, 且当 $x > 0$ 时,
 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sin x}{x} e^{-x^2}$, 但是它在 $x \in (0, +\infty)$ 却不一致收敛. 事

实上, $\forall A > 0$, 当 $x > 0$ 时, $\int_A^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy = \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} \cdot \int_{Ax}^{+\infty} e^{-t^2} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (x \rightarrow 0^+)$, 由此可知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy$ 在 $(0 < x < +\infty)$ 不一致收敛.

3. 设 $f(t)$ 在 $t > 0$ 连续, $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 当 $\lambda = a, \lambda = b$ 时皆收敛, 且 $a < b$. 求证 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 关于 λ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

【证明】

$I = \int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt = \int_0^1 t^{\lambda-a} \cdot t^a f(t) dt + \int_1^{+\infty} t^{\lambda-b} \cdot t^b f(t) dt$, 设 $I_1 = \int_0^1 t^{\lambda-a} \cdot t^a f(t) dt$, $I_2 = \int_1^{+\infty} t^{\lambda-b} \cdot t^b f(t) dt$, 由条件知, $\int_0^1 t^a f(t) dt$ 收敛, 又 $\forall \lambda \in [a, b]$ 且固定, $t^{\lambda-a}$ 关于 t 是单调递增的, 且 $|t^{\lambda-a}| \leq 1$ ($\lambda \in [a, b], t \in [0, 1]$), 由阿贝尔判别法知, I_1 在 $[a, b]$ 一致收敛, 类似方法可证, I_2 在 $[a, b]$ 一致收敛, 故 $I = \int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

4. 讨论下列函数在指定区间上的连续性: ((2) 小题见例 8-29)

$$(1) F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + y^2} dy, x \in (-\infty, +\infty).$$

【解】 (1) 当 $x > 0$ 时, $F(x) = \arctan \frac{y}{x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, 显然是连续的; 当 $x < 0$ 时, $F(x) = \arctan \frac{y}{x} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{2}$, 连续; 当 $x = 0$ 时, $F(0) = 0$, 于是, 当 $x = 0$ 时, $F(x)$ 不连续.

5. 见例 8-25.

8. 利用微分交换次序计算下列积分: ((1) 见例 8-45, (3) 见例 8-31)

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx.$$

【解】 (2) 当 $m = 0$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx = 0$. 下面设 $m \neq 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx = 0$, 故 $m = 0$ 不是瑕点, 从而被积函数在 $0 \leq x < +\infty$ 及 $a > 0, b > 0$ 内连续. 又由于 $\left| \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \right| \leq \frac{e^{-ax} + e^{-bx}}{x} (x > 0)$,

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax} + e^{-bx}}{x} dx = 0$ 收敛, 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx$ 收敛, 从而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx$ 收敛. 当 $a \geq a_0 > 0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \right) dx = - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin mx dx$ 是一致收敛的. 事实上, $|e^{-ax} \sin mx| \leq e^{-a_0 x} (x \geq 0)$, 而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-a_0 x} dx = \frac{1}{a_0}$ 收敛. 于是, 对于积分

$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx$, 当 $a \geq a_0$ 时, 利用莱布尼茨法则, 得

$I'(a) = - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin mx dx = - \frac{m}{a^2 + m^2}$, 由 $a_0 > 0$ 的任意性, 上式对一切 $a > 0$ 均成立. 从而 $I(a) = - \int \frac{m}{a^2 + m^2} da = - \arctan \frac{a}{m} + C$. 令 $a = b$, 得 $I(b) = 0 = - \arctan \frac{b}{m} + C$, 故 $C = \arctan \frac{b}{m}$. 最后得, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx = \arctan \frac{b}{m} - \arctan \frac{a}{m}$, $m \neq 0$.

10. 利用 $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$ 计算拉普拉斯积分 $L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$ 和 $L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx$.

【解】 ① $L = \int_0^{+\infty} \cos ax dx \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$, 由于被积函数 $\cos ax e^{-y(1+x^2)}$ 是 $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y < \infty$ 上的连续函数, 并且绝对值的积分 $\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} |e^{-y(1+x^2)} \cos ax| dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2} < +\infty$, 故原逐项积分可交换次序, 得 $L = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos ax dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{a^2}{4y}} dy = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$;

② 由于 $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\cos ax}{1+x^2} \right) = - \frac{x \sin ax}{1+x^2}$, 考虑积分 $L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$, 由于 $\left| \frac{\cos ax}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ 收敛, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$ 当 $a \in \mathbb{R}$ 时一致收敛, 又由于当 $a \geq a_0 > 0$ 时, $\left| \int_0^A \sin ax dx \right| = \left| \frac{1 - \cos aA}{a} \right| \leq \frac{2}{a_0}$, 而 $\frac{x}{1+x^2}$

当 $x > 1$ 时递减, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于 0, 于是由狄利克雷判别法知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$ 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时一致收敛, 因此, 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时, 可在积分号下求导数, 得 $\frac{dL}{d\alpha} = -L_1$. 由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性, 上式对一切 $\alpha > 0$ 均成立. 由 ① 知当 $\alpha > 0$ 时, $L = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$. 于是, $L_1 = -\frac{dL}{d\alpha} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} (\alpha > 0)$. 显然, 当 $\alpha < 0$ 时, $L_1 = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(-\alpha x)}{1+x^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^{\alpha}$, 当 $\alpha = 0$ 时, $L_1 = 0$, 综上所述, $L_1 = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot e^{-|\alpha|}$.

11. 见例 8-37.

12. 利用已知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx;$$

$$(2) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y \cos y x}{y} dy;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx (a > 0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx (a > 0);$$

$$(5) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{【解】 } (1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx &= -\frac{1}{4} \sin^4 x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{4 \sin^3 x \cos x}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(3 \sin x - \sin 3x) \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y \cos y x}{y} dy &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y (1+x)}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y (1-x)}{y} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y (1+x)}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y (1-x)}{y} dy. \end{aligned}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 原式 $= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2y}{y} dy = \frac{1}{4}$; 当 $x \neq \pm 1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y (1+x)}{y(1+x)} d(1+x)y + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y (1-x)}{y(1-x)} dy(1-x) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= -\frac{1}{2a} x^2 e^{-ax^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} d(\sqrt{ax}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}.$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]} dx \\ &= e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})} dx &= e^{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\frac{a}{x})^2} dx \\ &= 2e^{2a} \int_0^{+\infty} e^{-(x+\frac{a}{x})^2} dx \\ &= 2e^{2a} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+4a)} dx \\ &= 2e^{-2a} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-2a}. \end{aligned}$$

13. 求下列积分: ((1) 小题见例 8-30)

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2} dx.$$

解 (2) 令 $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2} dx$, 易知 $\frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2}$ 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续, $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2} \right) = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)}$ 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续, 还可易证 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2} dx$ 在 $[0, +\infty)$ 收敛.

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)} dx$ 在 $[a_0, +\infty)$ ($a_0 > 0$) 上一致收敛, 由 $a_0 > 0$ 的任

意性知, $I(1) = \lim_{a \rightarrow 1^+} I(a)$, $I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)} dx =$

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{1+ax^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{a}{1+ax^2} \right] dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a-1} + \frac{\sqrt{a}}{1-a} \right), \text{ 从而}$$

$I(a) = \pi \ln(1+\sqrt{a}) + C$, 由于 $I(0) = 0$, 得, $C = 0$. $I(1) =$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \ln 2.$$

14. 证明:

(1) $\int_0^1 \ln(xy) dy$ 在 $\left[\frac{1}{b}, b\right]$ ($b > 1$) 上一致收敛;

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^y}$ 在 $(-\infty, b]$ ($b < 1$) 上一致收敛.

【证明】 (1) 令 $y = \frac{1}{t}$, 则 $\int_0^1 \ln(xy) dy = \int_{+\infty}^1 \left(-\frac{1}{t^2}\right) \ln \frac{x}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x - \ln t}{t^2} dt$, 当 $x \in \left[\frac{1}{b}, b\right]$ ($b > 1$) 时, $\left| \frac{\ln x - \ln t}{t^2} \right| \leq \left| \frac{\ln \frac{1}{b} - \ln t}{t^2} \right| = \frac{\ln bt}{t^2}$ ($t \geq 1$), 由于 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln bt}{t^2} dt$ 收敛, 故结论成立.

(2) 令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $\int_0^1 \frac{dx}{x^y} = \int_{+\infty}^1 (-t^{y-2}) dt = \int_1^{+\infty} t^{y-2} dt$, 当 $y \in (-\infty, b]$ ($b < 1$) 时, $|t^{y-2}| \leq t^{b-2}$, 而 $b < 1$ 时, $b-2 < -1$, 从而知 $\int_1^{+\infty} t^{b-2} dt$ 收敛, 故结论成立.

第二十章 重积分

§1 重积分的概念

1. 证明性质(4), 性质(6).

【证明】 性质(4)(重积分的单调性): 若 f 与 g 都在 D 内可积, 且在 D 内的每点 P 都有 $f(P) \leq g(P)$, 则 $\iint_D f(P) d\sigma \leq \iint_D g(P) d\sigma$. 证明如下:

对 D 的任意分法: $T = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n\}$ 和任意的 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 有 $f(\xi_i, \eta_i) \leq g(\xi_i, \eta_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 因此 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$, 令 $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n} |d(\Delta\sigma_i)| \rightarrow 0$ 取极限, 由极限的不等式性质, 得

$$\iint_D f(P) d\sigma \leq \iint_D g(P) d\sigma.$$

性质(6)(积分中值定理): 设 D 为有界闭区域(因而是连通的), $f(P)$ 在 D

上可积, 则存在 $P_0 \in D$, 使得 $\iint_D f(P) d\sigma = f(P_0) |D|$, 其中 $|D|$ 表示 D 的面积. 证明如下:

已知函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(P)$ 在 D 上必能取到最小值 m 与最大值 M , 故 $m \leq f(P) \leq M, \forall P \in D$, 所以 $m |D| \leq \iint_D f(P) d\sigma \leq M |D|$, 即 $m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(P) d\sigma \leq M$. 根据连续函数的性质, 在 D 上至少存在一点 P_0 , 使 $f(P_0) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(P) d\sigma, P_0 \in D$, 即 $\iint_D f(P) d\sigma = f(P_0) \cdot |D|$.

2. 证明有界闭区域上的连续函数必可积.

【证明】 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上一致连续, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 D 上任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$, 当 $r(P_1, P_2) < \delta$ 时, 有

$$|f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon.$$

对任意分法 T , 它将 D 分成 n 个小闭区域 D_1, D_2, \dots, D_n , 则函数 $f(x, y)$ 在 D_k 上必能取到最大值 M_k 与最小值 m_k , 即 D_k 上存在的点 (ξ'_k, η'_k) 与 (ξ''_k, η''_k) , 使

$$f(\xi'_k, \eta'_k) = M_k \text{ 与 } f(\xi''_k, \eta''_k) = m_k (k = 1, 2, \dots, n),$$

所以, 当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |d(D_i)| < \delta$ 时, 有

$$\omega_k = M_k - m_k = f(\xi'_k, \eta'_k) - f(\xi''_k, \eta''_k) < \epsilon (k = 1, 2, \dots, n), \text{ 即}$$

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta \sigma_k < \epsilon \sum_{k=1}^n \Delta \sigma_k = \epsilon \cdot |D|, \text{ 所以 } f(x, y) \text{ 在 } D \text{ 上可积.}$$

3. 设 Ω 是可度量的平面图形或空间立体, f, g 在 Ω 上连续, 证明:

(1) 若在 Ω 上 $f(P) \geq 0$, 且 $f(P) \not\equiv 0$, 则 $\int_{\Omega} f(P) d\Omega > 0$;

(2) 若在 Ω 的任何部分区域 $\Omega' \subset \Omega$ 上, 有 $\int_{\Omega'} f(P) d\Omega = \int_{\Omega'} g(P) d\Omega$, 则在 Ω 上有 $f(P) \equiv g(P)$.

【证明】 (1) 函数 $f(x, y)$ 在 Ω 上的积分和是: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \Omega_i$, 易知 $f(\xi_i, \eta_i) \geq 0, \Delta \Omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 再由已知, $\exists P_0 \in \Omega$, 使得 $f(P_0) > 0$. 又 $f(P)$ 在 Ω 上连续, 则 $f(P)$ 在 P_0 点连续, 从而存在 P_0 的某 δ 邻域

$O(P_0, \delta)$, 使得 $\forall P \in O(P_0, \delta)$, 有 $f(P) > \frac{f(P_0)}{2} > 0$, 且应有 $P_0 \in \Delta\Omega_{i_0} (1 \leq i_0 \leq n)$, 并且当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(\Delta\Omega_i)\}$ 充分小时, 有 $\Delta\Omega_{i_0} \subset O(P_0, \delta)$. 此时有 $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\Omega_i \geq f(P_{i_0}) \Delta\Omega_{i_0} > \frac{f(P_0)}{2} \Delta\Omega_{i_0} > 0$, 所以

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\Omega_i = \int_{\Omega} f(P) d\Omega > \frac{f(P_0)}{2} \Delta\Omega_{i_0} > 0.$$

(2) 反证法. 假设在 P_0 点有 $f(P_0) \neq g(P_0)$, $P_0 \in \Omega$, 则 $f(P_0) - g(P_0) \neq 0$, 不妨设 $f(P_0) - g(P_0) > 0$. 由于 $f(P), g(P)$ 在 Ω 上可积, 则 $f(P) - g(P)$ 也在 Ω 上可积. 又因为 $f(P), g(P)$ 在 Ω 上连续, 所以 $f(P) - g(P)$ 在 Ω 上连续, 所以, 存在 P_0 的充分小的 δ 邻域 $\Omega' = O(P_0, \delta) \subset \Omega$, 使得 $\forall P \in \Omega'$, 都有 $f(P) - g(P) \geq \frac{f(P_0) - g(P_0)}{2} > 0$. 所以在 Ω' 上, 由(1)可知 $\int_{\Omega'} [f(P) - g(P)] d\Omega > 0$, 这与 $\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \int_{\Omega} g(P) d\Omega$ 相矛盾, 所以 $f(P) \equiv g(P), P \in \Omega$.

5. 若 $|f(x, y)|$ 在 D 上可积, 那么 $f(x, y)$ 在 D 上是否可积? 考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x, y \text{ 都是有理数} \\ -1 & \text{若 } x, y \text{ 至少有一个是无理数} \end{cases}$$

在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的积分.

【解】 不一定. 事实上, 对 D 的任意分法 T , 因为在 $[0, 1]$ 上的有理数与无理数是处处稠密的, 所以每个小区域上既存在横、纵坐标皆为有理数的点又至少存有一个为无理数的点, 如果在每个小区域上取横、纵坐标皆为有理数的

点 P'_k , 则积分和 $\sigma'_n = \sum_{k=1}^n f(P'_k) \Delta\sigma_k = 1$, 如果取有一个坐标值为无理数的点

P''_k , 则积分和为 $\sigma''_n = \sum_{k=1}^n f(P''_k) \Delta\sigma_k = -1$, 所以当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 积分和的极限是不存在的, 即 $f(x, y)$ 在 D 上不可积.

但是, 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上, $|f(x, y)| \equiv 1$, 所以 $|f(x, y)|$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上是可积的.

6. 见例 6-1.

§2 重积分化累次积分

1. 计算下列二重积分: ((1)(3) 小题见例 6-2)

(2) $\iint_D \cos(x+y) dx dy, D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi];$

(4) $\iint_D \frac{x}{1+xy} dx dy, D = [0, 1] \times [0, 1].$

【解】 (2) -2 . (4) $2\ln 2 - 1$.

2. 将二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化为不同顺序的累次积分: ((2)(4) 小题见例 6-3)

(1) D 由 x 轴与 $x^2 + y^2 = r^2 (y > 0)$ 所围成;

(3) D 由 $y = x^3, y = 2x^3, y = 1$ 和 $y = 2$ 围成.

【解】 (1) $\iint_D f dx dy = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f dy = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f dx.$

(3) $\iint_D f dx dy = \int_1^2 dy \int_{(y/2)^{1/3}}^{y^{1/3}} f dx = \int_{2^{-1/3}}^1 dx \int_1^{2x^3} f dy + \int_1^{2^{-1/3}} dx \int_{x^3}^2 f dy.$

3. 改变下列累次积分的次序: ((1)(3) 小题见例 6-4)

(2) $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy;$

【解】 (2) $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy = \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_1^{y^2} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_1^2 f(x, y) dx.$

4. 见例 6-5.

5. 计算下列二重积分: ((1)(2)(5)(7) 小题见例 6-6)

(3) $\iint_D \sqrt{x} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq x;$

(4) $\iint_D |xy| dx dy, D: x^2 + y^2 \leq a^2;$

(6) $\iint_D x^2 y^2 dx dy, D$ 由 $x = y^2, x = 0, x = 2, y = 2 + x$ 所围成;

(8) $\iint_D \sin nx dx dy$, D 由 $y = x^2$, $y = 4x$ 和 $y = 4$ 所围成.

【解】 (3) $\frac{8}{15}$, (4) $\frac{a^4}{2}$, (6) $\frac{592}{15} - \frac{32\sqrt{2}}{27}$.

(8) $-\frac{4\sin n(n + \sin n - 2n\cos n)}{n^3}$.

6. 求下列二重积分: ((3) 小题见例 6-7)

(1) $I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$; (2) $I = \int_0^1 dx \int_x^1 x^2 e^{-y^2} dy$.

【解】 (1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$, (2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$.

8. 计算下列三重积分: ((1)(2)(3)(5) 小题见例 6-8)

(4) $\iiint_V x^3 yz dx dy dz$, V 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

围成的位于第一卦限的有界区域;

(6) $\iiint_V y \cos(x+z) dx dy dz$, V 是由 $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$ 及 $x+z =$

$\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

【解】 (4) $\frac{1}{192}$, (6) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

9. 改变下列累次积分的次序: ((1)(4) 小题见例 6-9)

(2) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$; (3) $\int_1^2 dx \int_0^1 dy \int_{1-x-y}^0 f(x, y, z) dz$.

【解】 (2) 原式 = $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dx +$
 $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^2+1} dz \int_{\sqrt{x-y^2}}^1 f(x, y, z) dx$.

(3) 原式 = $\int_0^1 dy \int_{-y}^0 dz \int_1^2 f(x, y, z) dx +$
 $\int_0^1 dy \int_{-y-1}^{-y} dz \int_{1-y-z}^2 f(x, y, z) dx$
 $= \int_1^2 dx \int_{-x+1}^0 dz \int_0^1 f(x, y, z) dy +$
 $\int_1^2 dx \int_{-x}^{-x+1} dz \int_{1-x-z}^1 f(x, y, z) dy$.

10. 求下列立体之体积: ((1) 小题见例 6-10)

(2) V 由 $z \geq x^2 + y^2$, $y \geq x^2$, $z \leq 2$ 所确定.

(3) V 是坐标平面及 $x = 2$, $y = 3$, $x + y + z = 4$ 所围成的柱体.

【解】 (2) $\frac{5\sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{9}\pi - \frac{6}{35}$. (3) $V = 9$.

§3 重积分的变量代换

1. 用极坐标变换将 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化为累次积分: ((3)(4) 小题见例 6-11)

(1) D : 半圆 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$;

(2) D : 半环 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, $x \geq 0$.

【解】 (1) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$.

(2) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$.

2. 用极坐标变换计算下列二重积分: ((1)(3) 小题见例 6-12)

(2) $\iint_D (x + y) dx dy$, D : 圆 $x^2 + y^2 \leq x + y$ 的内部;

(4) $\iint_D x dx dy$, D 是由阿基米德螺线 $r = \theta$ 和半射线 $\theta = \pi$ 围成;

(5) $\iint_D xy dx dy$, D 由对数螺线 $r = e^\theta$ 和半射线 $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 围成.

【解】 (2) $\frac{\pi}{2}$. (4) $4 - \pi^2$. (5) $\frac{1}{80}(1 + e^{2\pi})$.

3. 在下列积分中引入新变量 u, v 将它们化为累次积分: ((2)(3) 小题见例 6-13)

(1) $\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy$, 若 $u = x + y$, $v = x - y$;

(4) $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x + y \leq a, x \geq 0, y \geq 0\}$ ($a >$

0), 若 $x + y = u$, $y = uv$.

【解】 (1) $\frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$.

$$(4) \int_0^a u du \int_0^1 f(u - uv, uv) dv.$$

4. 作适当的变量代换, 求下列积分: ((3) 小题见例 6-14)

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D \text{ 是由 } x^2 + y^4 = 1 \text{ 围成的区域};$$

$$(2) \iint_D (x + y) dx dy, D \text{ 由 } y = 4x^2, y = 9x^2, x = 4y^2, x = 9y^2 \text{ 围成}.$$

【解】 (1) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 原式 $= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$$(2) \text{ 作变换 } u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}.$$

5. 利用二重积分求下列曲面围成的立体的体积: ((1)(6) 小题见例 6-15)

$$(2) z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = R^2;$$

$$(3) \text{ 球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ 与圆柱面 } x^2 + y^2 = ax (a > 0) \text{ 的公共部分};$$

$$(4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} (z > 0);$$

$$(5) z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, 2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

【解】 (2) $\frac{2\pi}{3} R^2 h$. (3) $\frac{8}{9} a^3$. (4) $\frac{1}{3} \pi abc (2 - \sqrt{2})$. (5) $2\pi(4\sqrt{2} - 3)$.

6. 见例 6-16. 7. 见例 6-17. 8. 见例 6-18.

9. 作适当的变量代换, 求下列三重积分:

$$(1) \iiint_V x^2 y^2 z dx dy dz, V \text{ 由 } z = \frac{x^2 + y^2}{a}, z = \frac{x^2 + y^2}{b}, xy = c, xy = d, y = ax, y = \beta x \text{ 围成的立体, 其中 } 0 < a < b, 0 < c < d, 0 < a < \beta;$$

$$(2) \iiint_V x^2 y z dx dy dz, V \text{ 同(1)};$$

$$(3) \iiint_V y^4 dx dy dz, V \text{ 由 } x = az^2, x = bz^2 (z > 0, 0 < a < b), x = ay, x = \beta y (0 < a < \beta), \text{ 以及 } x = h (h > 0) \text{ 围成};$$

$$(4) \iiint_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} dx dy dz, V \text{ 由 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 围成};$$

$$(5) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

- 【解】 (1) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{4} (d^4 - c^4) \left(\beta - \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$.
 (2) $\frac{2}{7} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) (d^{\frac{7}{2}} - c^{\frac{7}{2}}) \left[\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} + \frac{1}{3} (\beta^{-\frac{3}{2}} - \alpha^{-\frac{3}{2}}) \right]$.
 (3) $\frac{2}{13} h^{\frac{13}{2}} (a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$.
 (4) $4\pi abc(2 - e)$. (5) $\frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1)$.

10. 见例 6-19.

§ 4 曲面面积

1. 求下列曲面的面积: ((4) 小题见例 6-20)

(1) $z = axy$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 内的部分;

(3) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所截部分.

【解】 (1) 所围曲面在 Oxy 面上的投影为 $D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2) \leq a^2\}$, 所以

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + a^2(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1 + a^2 r^2} r dr = \frac{2\pi}{3a^2} [(1 + a^4)^{\frac{3}{2}} - 1]. \end{aligned}$$

(3) 所围曲面在 Oxy 面上的投影为 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, 所以

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

第二十一章 曲线积分与曲面积分

§1 第一型曲线积分与曲面积分

2. 计算下列第一型曲线积分: ((1)(6)(9) 小题见例 6-21)

(2) $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = ax$;

(3) $\int_L xyz ds$, 其中 L 为螺旋线 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ($0 < a < b$), $0 \leq t \leq 2\pi$;

(4) $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 与 (3) 相同;

(5) $\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, 其中 L 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

(7) $\int_L xy ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线;

(8) $\int_L (xy + yz + zx) ds$, 其中 L 同 (7);

(10) $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x = y$ 相交的圆周.

【解】 (2) $2a^2$. (3) $\frac{-\pi a^2 b}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.

(4) $\sqrt{a^2 + b^2} \left(2a^2\pi + \frac{8}{3}b^2\pi^3 \right)$.

(5) $4a^{\frac{2}{3}}$. (7) $\frac{-\pi a^3}{3}$. (8) πa . (10) $2\pi a^2$.

3. 计算下列第一型曲面积分: ((1)(5) 小题见例 6-22)

(2) $\iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2}$, 其中 S 为柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = H$ 所截取的部分;

(4) $\iint_S z^2 dS$, 其中 S 为螺旋面的一部分: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$ ($0 \leq u \leq a$, $0 \leq v \leq 2\pi$).

【解】 (2) $2\pi \frac{H}{R}$. (4) $\frac{4}{3}\pi^3[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})]$.

4. 见例 6-23. 5. 见例 6-24.

6. 求螺线的一支 $L: x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{h}{2\pi}t (0 \leq t \leq 2\pi)$ 对 x 轴的转动惯量 $I = \int_L (y^2 + z^2) ds$. 设此螺线的线密度是均匀的.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } I &= \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \cdot \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \cdot \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt \\ &= \left(\pi a^2 + \frac{2}{3} \pi h^2 \right) \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}. \end{aligned}$$

7. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 1$ 的质量. 设此壳的密度 $\rho = z$.

$$\text{【解】 } \frac{2\pi + 12\pi\sqrt{3}}{15}.$$

8. 见例 6-25.

9. 求均匀球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 对 z 轴的转动惯量.

$$\text{【解】 } \frac{4}{3}\pi a^4 \rho_0.$$

10. 求均匀球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a)$ 的重心坐标.

$$\text{【解】 } \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{a}{\pi}(\sqrt{2} + 1) \right).$$

11. 若曲线以极坐标给出: $\rho = \rho(\theta) (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$, 试给出计算 $\int_L f(x, y) ds$ 的公式, 并用此公式计算下列曲线积分:

$$(1) \int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds, \text{ 其中 } L \text{ 是曲线 } \rho = a \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right);$$

$$(2) \int_L x ds, \text{ 其中 } L \text{ 是数螺线 } \rho = ae^{k\theta} (k > 0) \text{ 在圆 } r = a \text{ 内的部分.}$$

$$\text{【解】 } (1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} \cdot \sqrt{0^2 + a^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \cdot a d\theta = \frac{\pi}{4} ae^a;$$

$$(2) \int_L x ds = \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \cos\theta \cdot a e^{k\theta} \sqrt{1+k^2} d\theta = a^2 \sqrt{1+k^2} \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \cos\theta d\theta,$$

$$\begin{aligned} \text{令 } I &= \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \cos\theta d\theta = e^{2k\theta} \sin\theta \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 2k e^{2k\theta} \sin\theta d\theta \\ &= 2k \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} d\cos\theta \\ &= 2k e^{2k\theta} \cos\theta \Big|_{-\infty}^0 - 4k^2 \int_{-\infty}^0 e^{2k\theta} \cos\theta d\theta \\ &= 2k - 4k^2 I \Rightarrow I = \frac{2k}{4k^2 + 1}, \end{aligned}$$

$$\text{于是原式} = a^2 \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{2k}{4k^2 + 1} = \frac{2a^2 k \sqrt{1+k^2}}{4k^2 + 1}.$$

12. 求密度 $\rho = \rho_0$ 的截圆锥面 $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = r$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 < b \leq r \leq a$) 对位于曲面顶点 $(0, 0, 0)$ 的单位质点的引力. 当 $b \rightarrow 0$ 时, 结果如何?

$$\text{【解】 } X = Y = 0, Z = \int_b^a \frac{k \pi \rho_0 dr}{r} = k \pi \rho_0 \ln \frac{a}{b}. \text{ 若 } b \rightarrow 0, \text{ 则 } Z \rightarrow +\infty.$$

§2 第二型曲线积分与曲面积分

1. 计算下列第二型曲线积分: ((4)(6) 小题见例 6-26)

(1) $\int_L (2a - y) dx + dy$, 其中 L 为摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 沿 t 增加的方向;

(2) $\int_L \frac{-x dx + y dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 依逆时针方向;

(3) $\int_L x dx + y dy + z dz$, 其中 L 为从 $(1, 1, 1)$ 到 $(2, 3, 4)$ 的直线段;

(5) $\int_L y dx - x dy + (x^2 + y^2) dz$, L 为曲线 $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = at$ 从 $(1, 1, 0)$ 到 (e, e^{-1}, a) .

$$\text{【解】 } (1) \pi a^2. \quad (2) 0. \quad (3) 13. \quad (5) 2 + \frac{a}{2}(e^2 - e^{-2}).$$

2. 见例 6-27.

3. ((1)(3) 小题见例 6-28) 求闭曲线 L 上的第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2},$$

(2) L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 顺时针方向;

(4) L 是以 $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$ 为顶点的三角形, 顺时针方向.

【解】 (2) -2π . (4) 2π .

4. 求力场 F 对运动的单位质点所作的功, 此质点沿曲线 L 从 A 点运动到 B 点: ((3)(4) 小题见例 6-29)

(1) $F = (x - 2xy^2, y - 2x^2y)$, L 为平面曲线 $y = x^2$, $A(0, 0)$, $B(1, 1)$;

(2) $F = (x + y, xy)$, L 为平面曲线 $y = 1 - |1 - x|$, $A(0, 0)$, $B(2, 0)$.

【解】 (1) 0. (2) $\frac{1}{3}$.

5. 见例 6-30. 6. 见例 6-31. 7. 见例 6-32.

8. 计算下列第二型曲面积分: ((4)(5)(6) 小题见例 6-33)

(1) $\iint_S y(x - z)dydz + x^2dzdx + (y^2 + xz)dxdy$, 其中 S 为 $x = y = z = 0$, $x = y = z = a$ 六个平面所围的正立方体边界的外侧;

(2) $\iint_S (x + y)dydz + (y + z)dzdx + (z + x)dxdy$, 其中 S 是以原点为中心, 边长为 2 的正立方体表面的外侧;

(3) $\iint_S yzdzdx$, S 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的上半部分上侧;

(7) $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, S 是球面 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ 的外侧.

【解】 (1) a^4 . (2) 24. (3) 0. (7) $\frac{8}{3}\pi R^3(a + b + c)$.

9. 见例 6-34.

第二十二章 各种积分间的联系 与场论初步

§1 各种积分之间的联系

1. 应用格林公式计算下列积分: ((4)(5) 小题见例 6-35)

(1) $\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$, 其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 取正向;

(2) $\oint_L (x+y) dx + (x-y) dy$, L 同(1);

(3) $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, L 是顶点为 $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2,$

5) 的三角形的边界, 取正向.

【解】 (1) $\frac{1}{4} ab(a^2 + b^2)\pi$. (2) 0. (3) $-46\frac{2}{3}$.

2. 利用格林公式计算下列曲线所围成图形的面积: ((3) 小题见例 6-36)

(1) 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$;

(2) 笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$).

【解】 (1) a^2 . (2) $\frac{3}{2}a^2$.

3. 利用高斯公式求下列积分: ((1)(3) 小题见例 6-37)

(2) $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 S 是单位球面的外侧;

(4) $\iint_S (x - y^2 z^2) dy dz + (y - z^2 + x^2) dz dx + (z - x^2 + y^2) dx dy$, S 是

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 的外侧.

【解】 (2) $\frac{12}{5}\pi$. (4) $4\pi R^3$.

4. 利用斯托克斯公式计算下列积分: ((3) 小题见例 6-38)

(1) $\oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, 其中

(a) L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, 方向是逆时针;

(b) L 为 $y^2 + z^2 = 1$, $x = y$ 所交的椭圆, 从 x 轴正向看去, 按逆时针方向.

(2) $\oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, L 是从 $(a, 0, 0)$ 经 $(0, 0, a)$ 至 $(0, a, 0)$ 回到 $(a, 0, 0)$ 的三角形.

(4) $\oint_L ydx + zdy + xdz$, L 是 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, 从 x 轴正向看去圆周是逆时针方向.

【解】 (1) (a) $-\frac{1}{8}\pi a^6$, (b) 0.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_S (-1-1)dydz + (-1-1)dzdx + (-1-1)dxdy \\ &= 3 \iint_{S_{xy}} (-2)dxdy = -3a^2. \end{aligned}$$

(4) $-\sqrt{3}\pi a^2$.

5. 见例 6-39. 6. 见例 6-40. 7. 见例 6-41. 8. 见例 6-42.

9. 见例 6-43.

10. 求证 $\iiint_V \frac{dx dy dz}{r} = \frac{1}{2} \oint_S \cos(r, n) dS$, 其中 S 是包围 V 的分片光滑封闭曲面, n 为 S 的外法线方向, $r = (x, y, z)$, $r = |r|$. 试对下列两种情形进行讨论:

(1) V 中不含原点 $(0, 0, 0)$;

(2) V 中含原点 $(0, 0, 0)$ 时, 令 $\iiint_V \frac{dx dy dz}{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iiint_{V-V_\epsilon} \frac{dx dy dz}{r}$, 其中

V_ϵ 是以原点为心, 以 ϵ 为半径的球.

【证明】 (1) 设 V 中不含 $(0, 0, 0)$, 因为

$\cos(r, n) = \cos(r, x)\cos\alpha + \cos(r, y)\cos\beta + \cos(r, z)\cos\gamma$, 其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为 n 的方向余弦, 且 $\cos(r, x) = \frac{x}{r}$, $\cos(r, y) = \frac{y}{r}$, $\cos(r, z) = \frac{z}{r}$, 故 $\cos(r, n) = \frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma$, 由高斯公式, 得

$$\begin{aligned} \oint_S \cos(r, n) dS &= \oint_S \left(\frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) \right] dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iiint_V \left[\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \right] dx dy dz \\
 &= \iiint_V \frac{2}{r} dx dy dz.
 \end{aligned}$$

故
$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{r} = \frac{1}{2} \oint_S \cos(r, n) dS.$$

(2) 设 V 中含原点 $(0, 0, 0)$, 这时, 不能对 V 应用高斯公式, 必须用一小区域将点 $(0, 0, 0)$ 挖掉, 即以点 $(0, 0, 0)$ 为中心, 充分小的 $\epsilon > 0$ 为半径作一球域 V_ϵ , 其边界(球面)以 S_ϵ 表示. 对闭域 $V - V_\epsilon$, 应用高斯公式, 仿上可得:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \cos(r, n) dS + \iint_{S_\epsilon} \cos(r, n) dS &= \iiint_{V-V_\epsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) \right] dx dy dz \\
 &= 2 \iiint_{V-V_\epsilon} \frac{dx dy dz}{r}.
 \end{aligned}$$

但在 S_ϵ 上, n 的方向与 r 的方向相反, 故 $\cos(r, n) = -1$, 于是 $\iint_{S_\epsilon} \cos(r, n) dS = -4\pi\epsilon^2$, 由此可知, 在前式中含 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 取极限, 即得
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iiint_{V-V_\epsilon} \frac{dx dy dz}{r} =$$

11. 利用高斯公式变换以下积分: ((2) 小题见例 6-44)

(1)
$$\iiint_S xy dx dy + xz dz dx + yz dy dz.$$

【解】 (1) 0.

12. 设 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 是具有二阶连续偏导数的函数, 并设 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 证明:

(1)
$$\iint_D \Delta u dx dy = \int_l \frac{\partial u}{\partial n} ds;$$

(2)
$$\iint_D \Delta u dx dy = - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \oint_l v \frac{\partial u}{\partial n} ds;$$

(3)
$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = - \oint_l \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

其中 σ 为闭曲线 l 所围的平面区域, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为沿 l 外法线的方向导数.

$$\begin{aligned}
\text{【证明】} \quad (1) \int_l \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \int_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right) ds \\
&= \int_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(t, y) - \frac{\partial u}{\partial y} \cos(t, x) \right) ds \\
&= \int_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_D \Delta u dx dy.
\end{aligned}$$

(2) 由(1)

$$\begin{aligned}
\oint_l v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_l v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{于是, } - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \oint_l v \frac{\partial u}{\partial n} ds \\
= - \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy + \\
\iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx dy \\
= \iint_D \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_D v \Delta u dx dy.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) - \oint_l \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds &= - \oint_l v \frac{\partial u}{\partial n} ds + \oint_l u \frac{\partial v}{\partial n} ds \\
&= - \oint_l v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx + \oint_l u \frac{\partial v}{\partial x} dy - u \frac{\partial v}{\partial y} dx \\
&= \oint_l \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy - \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \\
&= \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy.
\end{aligned}$$

13. 设 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, S 是 V 的边界曲面, 证明:

$$(1) \iiint_V \Delta u dx dy dz = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS;$$

$$(2) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz +$$

$$\iiint_V u \Delta u dx dy dz.$$

式中 u 在 V 及其边界曲面 S 上有连续的二阶偏导数, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的方向导数.

【证明】 (1) 由于 $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$, 因此, 由高斯公式,

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \iiint_V \Delta u dx dy dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iint_S \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + u \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + u \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V u \Delta u dx dy dz + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

14. 计算下列曲面积分: ((2)(3) 小题见例 6-45)

$$(1) \iint_S (x^2 - y^2) dy dz + (y^2 - z^2) dz dx + 2z(y - x) dx dy,$$

其中 S 是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (z \geq 0)$, 下侧;

$$(4) \iint_S \left(\frac{x^3}{a^2} + yz \right) dy dz + \left(\frac{y^3}{b^2} + z^3 x^2 \right) dz dx + \left(\frac{z^3}{c^2} + x^3 y^3 \right) dx dy,$$

S 是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (x \geq 0)$, 后侧.

【解】 (1) 0. (4) $-\frac{6}{5} \pi abc$.

15. 见例 6-46. 16. 见例 6-47. 17. 见例 6-48.

18. 设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在全平面上有连续偏导数, 而且以任意点 (x_0, y_0) 为中心, 以任意正数 r 为半径的上半圆 $l: x = x_0 + r \cos \theta, y = y_0 + r \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 恒有

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

求证 $P(x, y) \equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$.

【证明】 由已知, 对平面上任意一点 (x_0, y_0) , 以 (x_0, y_0) 为中心, 任意 $r > 0$ 为半径作一上半圆域 D , 其上半圆周记为 l , 水平直径记为 AB , 则

$$\begin{aligned}\int_{AB} P dx + Q dy &= \oint_{l+AB} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_M \cdot \iint_D dx dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_M \cdot \frac{\pi}{2} r^2,\end{aligned}$$

其中 M 为 D 内某一点. 又 $\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{AB} P(x, y) dx = \int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x, y_0) dx$
 $= P(\xi, y_0) \int_{x_0-r}^{x_0+r} dx = P(\xi, y_0) \cdot 2r \quad (x_0 - r \leq \xi \leq x_0 + r)$, 所以 $P(\xi, y_0)$
 $= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_M \cdot \frac{\pi r}{4}$, 此式对任意 $r > 0$ 都成立, 两端令 $r \rightarrow 0$ 取极限, 得

$$P(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot \frac{\pi \cdot 0}{4} = 0.$$

由 (x_0, y_0) 的任意性, 知 $P(x, y) \equiv 0$. 从而 $\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_M = 0$, 令 $r \rightarrow 0$ 得
 $\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = 0$, 由 (x_0, y_0) 的任意性, 这就证明了 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$.

§2 积分与路径无关

1. 验证下列积分与路径无关, 并求它们的值: ((2)(5)(7) 小题见例 6-49)

(1) $\int_{(0,0)}^{(0,1)} (x-y)(dx-dy)$;

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ 沿不通过原点的的路径;

(4) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$ 式中 $f(u)$ 是连续函数;

(6) $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz$;

(8) $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 在球

面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上.

【解】 (1) 0. (3) $\ln 10$. (4) $\int_0^{a+b} f(u)du$. (6) 0. (8) 0.

2. 求下列全微分的原函数: ((2)(3) 小题见例 6-50)

(1) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$;

(4) $(x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$;

(5) $(e^x \sin y + 2xy^2)dx + (e^x \cos y + 2x^2y)dy$;

(6) $\left[\frac{x}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{1}{x} + 2x^2 \right]dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{y}{(x^2 - y^2)^2} + 3y^2 \right]dy + 5z^3dz$.

【解】 (1) $u(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C$.

(4) $u(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - 2xyz + C$.

(5) $u(x, y) = e^x \sin y + x^2y^2 + C$.

(6) $u(x, y, z) = -\ln x + \frac{2}{3}x^3 + \ln y + \frac{3}{4}y^4 + \frac{5}{4}z^4 + \frac{1}{2(y^2 - x^2)} + C$.

3. 函数 $F(x, y)$ 应满足什么条件才能使微分式 $F(x, y)(xdx + ydy)$ 是全微分.

【解】 $xF'_y(x, y) = yF'_x(x, y)$.

5. 见例 6-51. 6. 见例 6-52. 7. 见例 6-53. 8. 见例 6-54.

9. 计算积分 $\int_L x \ln(x^2 + y^2 - 1)dx + y \ln(x^2 + y^2 - 1)dy$, 其中 L 是被积函数的定义域内从点 $(2, 0)$ 至 $(0, 2)$ 的逐段光滑曲线.

【解】 0 (提示: 利用积分与路径无关).

§ 3 场论初步

1. 求 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 4x + 2y - 4z$ 在点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(-1, -1, -1)$ 的梯度, 并求梯度为零的点.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y - 4$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + 2x + 2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 6z - 4$.

① 在 O 点, 有 $\text{grad} u = -4i + 2j - 4k$, $|\text{grad} u| = 6$,

方向: $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \gamma = -\frac{2}{3}$;

② 在 A 点, 有 $\text{grad} u = 8j + 2k$, $|\text{grad} u| = 3\sqrt{17}$.

方向: $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{17}}{17}$;

③ 在 B 点, 有 $\text{grad}u = -8i - 4j - 10k$, $|\text{grad}u| = 6\sqrt{5}$.

方向: $\cos\alpha = \frac{-4\sqrt{5}}{15}$, $\cos\beta = \frac{-2\sqrt{5}}{15}$, $\cos\gamma = \frac{-\sqrt{5}}{3}$.

一般地, $|\text{grad}u| = \sqrt{(2x+2y-4)^2 + (4y+2x+2)^2 + (6z-4)^2}$, 所

以要 $|\text{grad}u| = 0$, 只要 $\begin{cases} 2x+2y-4=0 \\ 4y+2x+2=0 \\ 6z-4=0 \end{cases}$ 解之, 得 $x=-3$, $y=5$, $z=\frac{2}{3}$,

即在点 $(-3, 5, \frac{2}{3})$ 梯度为零.

2. 计算下列向量场 F 的散度和旋度: ((2) 小题见例 6-55)

(1) $F = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$;

(2) $F = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$;

(3) $F = (\frac{x}{yz}, \frac{y}{zx}, \frac{z}{xy})$.

【解】 (1) $\text{div}F(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$,

$$\begin{aligned} \text{rot}F(x, y, z) &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= 2(y - z, z - x, x - y). \end{aligned}$$

(2) $\text{div}F = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$,

$$\text{rot}F = (xz^2 - xy^2, x^2y - yz^2, y^2z - x^2z).$$

(3) $\text{div}F = \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+z}{xyz}$,

$$\text{rot}F = \left(-\frac{z}{xyz} + \frac{y}{xz^2}, -\frac{x}{yz^2} + \frac{z}{x^2y}, -\frac{y}{x^2z} + \frac{x}{y^2z} \right).$$

附录2 部分高校数学分析考研试题 及模拟试题

(东北大学 1997 年)

一、(15分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 证明:

- (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续;
- (2) $f'(x)$ 处处存在, 但在 $x=0$ 处 $f'(x)$ 不连续;
- (3) $f'(x)$ 在任何有限区间上均 Riemann 可积.

二、(20分) 设 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续, 求证:

- (1) $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在;
- (2) 当 $f(a+0) = f(b-0)$ 时, 必存在 $c \in (a, b)$ 使 $f(x)$ 在 c 处取最大值或最小值.

三、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[a-h, a+h]$ 上连续, 在 $(a-h, a+h)$ 上可微, 其中 $h > 0$ 是常数, 证明: 存在 $0 < \theta < 1$, 使

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h).$$

四、(20分) 1. 求由 $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$, $x^2 = 2my$, $x^2 = 2ny$, $x = 0$, $z = xy$ 所围成的体积. 其中 $0 < p < q$, $0 < m < n$ 是常数.

2. 设 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线. l, m, n 是常数, 计算第一型曲线积分

$$\oint_C (lx^2 + my^2 + nz^2) ds.$$

五、(20分) 1. 证明: 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 处处收敛, 且在任何有限区间 $a \leq a \leq b$ 上一致收敛, 但在 $-\infty < a < +\infty$ 上关于 a 非一致收敛.

2. 对任何 $\alpha > 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^\alpha}$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛.

六、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 是单调下降的非负连续函数, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛. 求证:

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛;

(2) 存在 $\xi: a \leq \xi \leq +\infty$, 使 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx$.

七、(5分) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上处处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - Ax] = B$, 其中 A 与 B 是常数. 证明: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续.

(东北大学 1998 年)

一、(20分) 1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 若对 $x_n \in [a, b] (n = 1, 2, \dots)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 存在, 求证: 存在 $x_0 \in [a, b]$ 使 $f(x_0) = A$.

2. 证明: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的周期函数, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. 进而求证: $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$ 不是周期函数.

二、(20分) 1. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明: 对任何 $x_0 > a$, $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上一致连续.

2. 在上述假设条件下, 存在 $x_0 \rightarrow +\infty$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$. 请证明此结论.

三、(20分) 1. 把二重积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+bx)dx dy$ 化为定积分. 其中 $f(t)$ 是处处连续的函数, 且 $a^2 + b^2 \neq 0$.

2. 设 C 是不经过原点的一条光滑简单闭曲线的正向, 计算曲线积分 $\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$.

四、(10分) 设 $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b)$ 上处处收敛, 而在 $x = b$ 处发散. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b)$ 上非一致收敛.

五、(15分) 设 $f(x, t)$ 在 $a \leq x < +\infty, a \leq t \leq \beta$ 上连续, 且广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$$

在 (a, β) 上关于 t 是一致收敛的. 证明: 此广义积分在 $[a, \beta]$ 上关于 t 是一致收敛的.

六、(15分) 证明：广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^\lambda} dx$ 在 $0 < \lambda < 2$ 上条件收敛(即收敛，但非绝对收敛)，且在 $0 < \lambda < 2$ 上内闭一致收敛，但非一致收敛。

(东北大学 1999 年)

一、(20分) 1. 设 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$ ，试证明：函数 $f(x) = xD(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导。

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续， $f(x) \geq 0$ 且不恒为 0，试证明： $\int_a^b f(x) dx > 0$ 。

3. 证明：广义积分 $\int_3^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 收敛。

4. 证明：函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 点不连续。

二、(10分) 设 $f(x)$ 是有限开区间 (a, b) 上的连续函数，证明： $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续的充分必要条件是： $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ， $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在。

三、(10分) 设函数列 $f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1 + n^4 x^4}$ ($n = 1, 2, \dots$)，试证明： $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上不一致收敛。

四、(10分) 试证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ 在任何有限区间内一致收敛，但对任意给定的 x 值都不绝对收敛。

五、(10分) 试举出 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上不是 Riemann 可积，而 $f^2(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的例子，并给出证明。

六、(10分) 求出由抛物线 $y^2 = px$ ， $y^2 = qx$ ($0 < p < q$)，以及双曲线 $xy = a$ ， $xy = b$ ($0 < a < b$) 所围区域的面积。

七、(10分) 设 S 为上半单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的上侧，计算第二类曲面积分：

$$\iiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy.$$

八、(20分) 利用 $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx (t \geq 0)$, 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

(东北大学 2000 年)

一、(20分) 简答下列各题:

(1) 用肯定的语气叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界; 并用此定义证明函数

$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上无界.

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可微, 但在 $x=0$ 点的任何一个邻域内有不可微的点, 其中

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 是否有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛? 为什么?

(4) 设 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 在点 (x_0, y_0) 处存在, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 证明: 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

二、(8分) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, $c \in (a, b)$, 且 $f(x)$ 在 (a, c) 和 (c, b) 内可微, $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = f'(c)$.

三、(8分) 求出由椭圆 $(2x+y)^2 + (x+2y)^2 = 1$ 所围成区域的面积.

四、(10分) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n dx = 0$.

五、(12分) 设 S 是三维空间中 xy 平面上的曲线段: $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 绕 y 轴旋转而成的曲面(方向取为右侧), 试计算曲面积分:

$$I = \iiint_{\Sigma} 2xy dydz + (1+y)^2 dzdx - 4yz dx dy.$$

六、(13分) 证明: 函数 $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

七、(13分) 设 $u_1(x) = \sin x, u_{n+1}(x) = \sin u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$, 证明:

(1) 对任何 $x \in (0, \pi)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上一致收敛.

八、(16分) 已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 证明:

(1) 对任何 $a \in (-\infty, +\infty)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(2) 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛.

(3) 在任何有限区间 $[a, b]$ 上, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

(东北大学 2001 年)

一、(28分) 填空:

1. 设 $E = \{x: x \in (0, 1) \text{ 中的有理数}\}$, 则 E 的聚点集为 _____, $\sup E =$ _____, $\inf E =$ _____;

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, $g(x) = f(x)\sin x$, 则函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的导数为 _____;

3. 设函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$, 则 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上关于任意分法的上和 $\bar{S} =$ _____, 下和 $\underline{S} =$ _____, 第 i 个区间的振幅 $\omega_i =$ _____;

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛域是 _____;

5. 设 F 是可微函数, $z = xy + F\left(\frac{y}{x}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____;

6. 设函数 $f(x) = \cos x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 的 Taylor 级数展开式是 _____;

7. 设空间区域 $\Omega(t): x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2 (t > 0)$, $f(t) = \iiint_{\Omega(t)} x^2 dx dy dz$ 满足 $f'(t) = 16\pi$, 则 $t =$ _____.

二、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上严格单调增加, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在(有限), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

三、(8分) 设函数 $f(x)$, $f'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在区间 (a, b) 上存在二阶导数; $f(a) = f(b) = 0$ 且存在 $c \in (a, b)$, 使 $f(c) > 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) < 0$.

四、(8分) 证明: 函数 $f(x) = \sin x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

五、(8分) 计算第二类曲线积分 $\int_l e^x(2 - \cos y)dx - e^x(y - \sin y)dy$, 其中 l 是从 $(0, 0)$ 沿 $y = \sin x$ 到 $(\pi, 0)$ 的有向曲线.

六、(10分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则偏导数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 存在. 且它们在 $(0, 0)$ 不连续, 在 $(0, 0)$ 点的任一邻域内无界, 但 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微.

七、(15分) 设 $u_1(x) = \sin x, u_{n+1}(x) = \sin u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$.

1. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}} u_n(x) = 1$;

2. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上一致收敛, 但不绝对收敛.

八、(15分) 设 $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx (0 \leq \alpha < +\infty)$, 证明:

1. $F'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$;

2. $F'(\alpha) = F(\alpha) - \frac{\pi}{2} (\alpha > 0)$.

(东北大学 2002 年)

一、(30分) 填空:

1. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$, $f(0) = 0$, 则_____.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dy =$ _____.

3. 设 $\xi = x, \eta = x^2 + y^2$, 则由方程 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 变换为 z 关于新自变量 ξ, η 的方程为_____.

4. 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 在 $x = 0$ 的 Taylor 级数展开式是_____, 约定 $(-1)! = 1$.

5. 引进新变量 $u = x + y, v = x - y$, 则积分 $\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy$ 变换成关于变量 u, v 的二次积分是_____.

6. 设 S 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z > 0)$ 的上侧, 则第二类曲面积分

$$\iint_S (x+1)dydz + (y+1)dzdx + (z+1)dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b (f(x))^n dx \right]^{\frac{1}{n}} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

三、(10分) 设 $a < 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $f(0) \cdot f'(0) \geq 0$; 证明: 存在 $\xi \in [a, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

四、(10分) 设 L 是一条分段光滑的闭曲线且原点位于闭曲线 L 的内部, 方向为逆时针方向, 计算第二类曲线积分

$$I = \oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}.$$

五、(10分) 证明: 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ 分别在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上一致收敛, 但在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上不一致收敛.

六、(10分) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上不一致收敛.

七、(20分) 设 $J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} dx (\alpha > 0, \beta > 0)$,

1. $\forall b > 0$, 证明: 广义积分 J 关于 $\alpha \in [0, b]$ 一致收敛;

2. 求广义积分 J 的值.

(北京师范大学 1992 年)

一、(10分) 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 10 = 0$ 确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

二、(20分) 1. 设 $f(t)$ 在 $t > 0$ 时连续, 如果积分 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 在 $\lambda = \alpha$ 和 $\lambda = \beta (\alpha < \beta)$ 时收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 关于 λ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

2. 证明 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2} \ln 2, x \in (0, 1)$.

三、(20分) 1. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中任意一点有有界导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明: 存在某点 $c \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(c) = 0$.

四、(10分) 设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中原点的一个邻域, $g(x) \in C^{(2)}(\Omega)$, $g(0) =$

0. 求证:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x), \text{ 其中 } f_i(x) \in C^{(1)}(\Omega), f_i(0) = \frac{\partial g(0)}{\partial x_i}.$$

五、(20分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 试证:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{tf(x)}{t^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

六、(20分) 设 D 为平面区域, $u(x, y) \in C^{(2)}(D)$. 证明: $u(x, y)$ 是调和函数, 即 u 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$ 的充要条件是: 对 D 内任一圆周 L , 其所限定的区域属于 D , 都有 $\int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$. 其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 沿 L 的单位法向量 n 的方向导数, s 为 L 的弧长参数.

(北京师范大学 1993 年)

一、(15分) 解答下列问题:

1. 求极限 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

2. 设 $f'(0)$ 存在, $f(0) = 0$, $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$. 求 $g'(0)$.

二、(15分) 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ (n 为自然数), 求证:

1. $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$; 2. $a_n \leq a_{n-1} \leq a_{n-2}$; 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

三、(12分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 求证: 若存在 $c \in (a, b)$, 使 $f(c) > 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) < 0$.

四、(12分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - cx - d) = 0$ (c, d 为常数), 求证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续.

五、(12分) 计算曲面积分

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

其中 S 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ ($z \geq c$) 的上侧.

六、(12分) 设函数 $z = z(x, y)$ 满足

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}, (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

作变量替换 $x = \sin u, y = \sin v$. 求证: $w = \ln z$ 满足

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = 0, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

七、(12分) 证明: 1. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \sin a dx$ 关于 $a \in [0, +\infty)$ 一致收敛.

2. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \sin a dx$ 关于 $x \in (0, +\infty)$ 不一致收敛.

八、(10分) 设函数序列 $\{f_n(x)\} (n = 1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 满足:

1. $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 处处收敛;

2. $f_n(x) \in C[a, b] (n = 1, 2, \dots)$, 且对一切 $x \in [a, b]$ 及一切自然数 n ,

有

$$|f'_n(x)| \leq M \quad (M \text{ 为常数}).$$

3. 求证 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

(北京师范大学 1996 年)

一、(15分) 1. 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), n = 1, 2, \dots$.

证明: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$.

2. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\{p_n\}$ 为单调增加序列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty, p_{n+1} \neq p_n$,

$n = 1, 2, \dots$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_n} = 0$.

二、(15分) 函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上有连续导函数, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ 均存在且有限, 试证:

(1) $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续; (2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在.

三、(10分) 函数 $f(x)$ 二次可微, $f(0) = f(1) = 0, \min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$. 试证:

$$\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8.$$

四、(15分) 证明: $\frac{1}{n \ln n} - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \sim \frac{1}{n (\ln n)^2} \quad (n \rightarrow +\infty)$.

五、(15分) 函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x}$, $x \in [0, +\infty)$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续;

(2) 证明: $\int_x^{2x} f(u) du = \ln(1+2x)$;

(3) 证明: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x} \sim \frac{\ln(1+2x)}{x \ln 2} (x \rightarrow \infty)$.

六、(15分) 设 C 为锥面 $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = (z-z_0) \tan \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. S 是包含在 C 的内部区域 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq (z-z_0) \tan \alpha\}$ 里的光滑曲面, S 与 C 的交线是没有重点的闭曲线, 且从点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 出发的任意射线与 S 至多有一个交点, 平行于 z 轴的直线与 S 也至多有一个交点. n 为 S 的法线方向, 其正方向指向圆锥内部的区域被 S 分割出来的无界区域, $r = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $|r| = r$. 求

$$I = \iint_S \frac{\cos \langle n, r \rangle}{r^2} dS.$$

七、(15分) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 求证:

(1) 任意 $\varepsilon > 0$, 则存在 $[c, d] \subset [a, b]$, 使得 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上的振幅 $\omega_f[c, d] < \varepsilon$;

(2) 证明 $f(x)$ 的连续点在 $[a, b]$ 处处稠密, 即求证任意 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 则 $f(x)$ 在 (α, β) 内有连续点;

(3) 若 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 的充要条件是 $f(x)$ 在连续点恒为零.

(北京师范大学 1997 年)

一、(16分) 设 $a_1 > b_1 > 0$, 且 $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}$, $n = 2, 3, \dots$. 证明: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的极限存在且都等于 $\sqrt{a_1 b_1}$.

二、(16分) 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上的二元连续函数, $f(0, 0) = 0$, 且在 $(0, 0)$ 处, $f(x, y)$ 可微. 求极限:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^t f(t, u) du}{1 - e^{-\frac{1}{4}x^4}}.$$

三、(17分) 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n (n = 2, 3, \cdots)$. 证明:

(1) 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上有惟一的实根 x_n ;

(2) 数列 $|x_n|$ 有极限, 并求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

四、(17分) 设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内连续, 在 (a, b) 内二阶可导且 $|g''(x)| \geq m > 0$ (m 为常数), 又 $g(a) = g(b) = 0$. 证明:

$$\max_{a \leq x \leq b} |g(x)| \geq \frac{m}{8}(b-a)^2.$$

五、(17分) 判断广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2 \sin^2 x}$ 的敛散性.

六、(17分) 设 Ω 由 $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 3x$, $y = 4x$ 所围成. 求积分

$$I = \iiint_{\Omega} x^2 y^2 z dx dy dz.$$

(北京师范大学 1998 年)

一、(20分) 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 且 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0$. 证明: $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$.

二、(20分) 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^n x$. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1}(f(x) - f(0))$.

三、(20分) 设 $f(x) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{-1} [1 - e^{-(x^2 + y^2)}], & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

求 f 在 $(0, 0)$ 的四阶 Taylor 多项式, 并求出 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0, 0)$.

四、(20分) 设广义积分 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 收敛. 证明: 存在 $\xi \in (1, \infty)$, 使得

$$\int_1^{\infty} x f(x) dx = \int_1^{\xi} f(x) dx.$$

五、(20分) 设 f 是 \mathbb{R}^n 的开集 G 到 \mathbb{R}^n 的可微变换. $x, y \in G, x \neq y$. 求证: 若线段 $\overline{xy} \in G$, 则存在 $\xi \in \overline{xy}$, 使得

$$|f(y) - f(x)|^2 = ((f(y) - f(x))f'(\xi)) \cdot (y - x),$$

式中 f' 表示 f 的导数 (Jacobi 阵), “ \cdot ” 表示 \mathbb{R}^n 中的内积.

(北京师范大学 1999 年)

一、(14分) (1) 试证: 数列 $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right\}$ 收敛.

(2) 记 $C_0 \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right\}$.

试证: $\lim_{p \rightarrow 0^+} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+p}} - \frac{1}{p} \right) = C_0$.

二、(14分) 求最小的 β 和最大的 α , 使所有的自然数 n 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$

三、(14分) 设 $f(x)$ 在实轴上有界且连续可微, 并满足

$$|f(x) + f'(x)| \leq 1, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

试证: $|f(x)| \leq 1, \quad x \in (-\infty, +\infty)$.

四、(15分) 设 $f_n(x) = \sin x + \sin^2 x + \cdots + \sin^n x$. 试证:

(1) 对任意自然数 n , 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内有且仅有一个根;

(2) $x_n \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{6}$.

五、(14分) 计算 $f(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy) dy$, 此处 $-\infty < y < +\infty$.

(计算过程要理由)

六、(15分) 设函数 $g(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续可微, $g(0) = 0$. 试证:

$$\int_0^a |g(x)g'(x)| dx \leq \frac{a}{2} \int_0^a |g'(x)|^2 dx,$$

其中等号成立当且仅当 $g(x) = cx$ (c 为常数).

七、(14分) 给定积分 $I = \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$. 作正则变换 $x =$

$x(u, v)$, $y = y(u, v)$, 区域 D 变成 Ω . 如果变换满足:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}.$$

试证: $I = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right] du dv$.

(北京师范大学 2001 年)

一、(15分) 证明下述 Dini 定理. 设 $-\infty < a < b < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C[a, b]$, 且 $f_n \geq f_{n+1}$. 如果 $\forall x \in [a, b]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f_n(x)| = 0.$$

二、(15分) 设 $n \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. 证明: 若 $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $P \neq Q$, $f(P) = f(Q)$. 则在线段 \overline{PQ} 上, 必有一点 ξ 处有一个方向导数等于零.

三、(20分) 设 $f_j: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 可导且

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right| < \frac{1}{3}, j = 1, 2.$$

令 $f = (f_1, f_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. 任取 $P \in \mathbb{R}^2$ 并定义 $P_1 = f(P)$, $P_{n+1} = f(P_n)$, $n \in \mathbb{N}$. 证明: $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = f(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n)$.

四、(15分) 设 $f \in C(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. 记 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. 定义

$$F(x) = \prod_{k=1}^n f(x_k), D = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < \dots < x_n < 1\}.$$

证明:
$$\int_D F(x) dx = \frac{1}{n!} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^n.$$

五、(20分) 设 $f(x) = \log \frac{1}{\left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|}$, $0 < x < 2\pi$. 请计算 f 的一切

Fourier 系数.

六、(15分) 计算 \mathbb{R}^3 中单位球面 $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 的面积.

(北京师范大学 2002 年)

一、(15分) 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 并且 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界. 证明: $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

二、(20分) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$, 其中 D 为区域 $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

三、(15分) 取 $u = \frac{y}{x}$, $v = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 作为新的自变量, 变换方程:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

四、(15分) 设 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 求证函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任意有界闭区间 $[a, b]$ 内一致收敛.

五、(20分) 设 $p \in [1, +\infty)$, 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n} + (-1)^{n-1})^p}$ 何时发

散? 何时条件收敛? 何时绝对收敛?

六、(15分) 求 $g'(a) = ?$ 其中

$$g(a) = \int_1^{\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx, \quad a \in (-\infty, +\infty).$$

(北京师范大学 2003 年)

一、(15分) 设 $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n^2}{1 + x_n^2}$, $x_1 = a$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求它的极限.

二、(15分) 设 $\alpha = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$, 证明存在 $a \leq x_n \leq b$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$ 成立.

三、(15分) 写出 $e^{\sin x}$ 在 $x = 0$ 点展开的 Taylor 级数的前五项系数, 并指出该级数的收敛区域.

四、(20分) 已知 $z = z(x, y)$ 由 $x^2 + y^2 + h^2(z) = 1$ 确定, 且 $h(z)$ 具有所需性质, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

五、(20分) 求下面曲面所围立体的体积, $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

六、(20分) 将直角坐标系下的 Laplace 方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 化为极坐标系下的形式.

七、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续导函数, 且 $f(1) = 0$, 证明函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n f(t) dt$ 在 $x \in [0, 1]$ 上一致收敛.

八、(25分) 设 $f(x)$ 定义在实轴 \mathbb{R} 上, 且 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续. 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$, 令 $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 证明:

(1) 若 $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 若 $f(0) > 0$, $f(x) \leq M$ 且 $|f'(x)| < 1$, $x \in \mathbb{R}$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

九、(10分) 设 Γ 是平面上过原点的光滑闭曲线, C_ϵ 是以原点为圆心, 半径为 ϵ 的圆周, Γ_ϵ 表示 Γ 截取含在 C_ϵ 中的曲线段后得到的曲线, 求 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中取 Γ_ϵ 的方向为正方向.

(北京师范大学 2004 年)

一、(10 分) 一个容器的底是正方形, 边是竖直的, 没有盖. 用 2700cm^2 的材料制造这样的容器, 求使得容积最大时的容器尺寸.

二、(10 分) 方程 $x = r\theta - r\sin\theta$, $y = r - r\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 表示旋轮线的一拱. 求其长.

三、(10 分) 方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 表示一个椭圆. 求此曲线绕 x 轴旋转一周所成曲面的面积.

四、(10 分) 一个半径 5m 、高 9m 的圆柱状水箱的三分之二蓄满了水. 求把所有的水抽出水箱顶所需做的功.

五、(10 分) 一个水坝的迎水面是一个竖直的等腰梯形, 上底长 200m , 下底长 100m , 高 40m . 求当水面达到坝顶时, 迎水面所受的水压力.

六、(20 分) 设

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{-1} [1 - e^{x(x^2 + y^2)}], & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0, 0)$.

七、(20 分) 证明对于所有的 $n = 1, 2, \dots$,

$$0 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1.$$

八、(20 分) 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 且

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0.$$

证明: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$.

九、(20 分) 设 f 在 \mathbb{R} 上有三阶连续导函数. 证明:

$$f(x) - (f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2) = \frac{1}{2} \int_0^x f'''(t)(x-t)^2 dt.$$

十、(20 分) 设 f 在 $[a, b]$ 上连续且单调增 ($-\infty < a < b < +\infty$). 证明:

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

并证明上式中, 等号仅当 f 为常值函数时成立.

附录3 常用数学符号一览表

X, A, \dots : 表示集合; x, a, \dots 表示元素.

$x \in X, x \notin X$: 分别表示 x 属于 X , x 不属于 X .

N^+ : 表示正整数集.

R : 表示实数集, 同时也表示无穷区间 $(-\infty, +\infty)$.

R^2 : 表示二维平面或二维欧氏空间; R^n 表示 n 维欧氏空间.

\Leftrightarrow : 表示等价或充分必要. 例如, $P \Leftrightarrow Q$ 表示 P 与 Q 等价, 或 P 成立的充分必要条件是 Q 成立.

$f(g(x))$: 表示函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的复合函数, 也写成 $(f \circ g)(x)$.

\forall : 表示“对任意”、“对所有”或“对每一个”.

\exists : 表示“存在”或“有”.

对偶法则: 设命题 P 为

$$p_1 S_1, p_2 S_2, \dots, p_n S_n, \text{ 使得 } S_{n+1}, \quad (*)$$

其中 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为逻辑符号 \forall 或 \exists , $S_i (i=1, 2, \dots, n+1)$ 代表数学表达式. 则为了得到命题 P 的否命题的肯定叙述, 只要将 $(*)$ 中的所有逻辑符号 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 从 $\forall (\exists)$ 改成 $\exists (\forall)$, 并将最后的 S_{n+1} 改为它的否定式即可. 例如, 数集 A 有界, 即

$$\exists M > 0, \forall x \in A, \text{ 使得 } |x| \leq M.$$

它的否定, 即数集 A 无界, 就是

$$\forall M > 0, \exists x \in A, \text{ 使得 } |x| > M.$$

附录 4

中英文人名对照表

阿贝尔 Abel	博雷尔 Borel	达朗贝尔 D'Alembert
欧拉 Euler	高斯 Gauss	拉普拉斯 Laplace
利普希茨 Lipschitz	皮亚诺 Peano	罗尔 Rolle
斯图茨 Stolz	巴拿赫 Banach	康托 Cantor
戴德金 Dedekind	费马 Fermat	海涅 Heine
莱布尼茨 Leibniz	麦克劳林 Maclaurin	拉阿比 Raabe
施瓦茨 Schwarz	泰勒 Taylor	波尔察诺 Bolzano
柯西 Cauchy	狄利克雷 Dirichlet	傅里叶 Fourier
拉格朗日 Lagrange	洛必达 L'Hospital	牛顿 Newton
黎曼 Riemann	斯托克斯 Stokes	魏尔斯特拉斯 Weierstrass

参 考 文 献

- 1 邓东皋,尹小玲. 数学分析简明教程(上、下册). 北京:高等教育出版社,1999
- 2 陈传璋等. 数学分析(上、下册). 第2版. 北京:高等教育出版社,1983
- 3 费定晖,周学圣. 数学分析习题集题解. 济南:山东科技出版社,2003
- 4 孙涛. 数学分析经典习题解析. 北京:高等教育出版社,2004
- 5 宋国柱. 分析中的基本定理和典型方法. 北京:科学出版社,2004